DR. MARIJAN BLEJEC

STATISTIČNE METODE
ZA PSIHOLOGE

LJUBLJANA 1959

Blejec

DR. MARIJAN BLEJEC

IZR. PROF. ZA STATISTIKO
NA EKONOMSKI FAKULTETI V LJUBLJANI

STATISTIČNE METODE
ZA PSIHOLOGE

LJUBLJANA
1959

ZALOŽILA: UPRAVA ZA POSREDOVANJE DELA LR SLOVENIJE

Priročnik je izdelan po predavanjih iz statističnih metod za psihologe, ki jih je v juniju 1957 za psihologe okrajnih poklicnih posvetovalnic organiziral Sekretariat za delo LRS.

Namen tečaja, ki sem ga vodil, in priročnika, ki sem ga napisal, je seznaniti psihologa-praktika s sodobnimi statističnimi metodami, s posebnim poudarkom na praktično uporabo. Zaradi tega ni slučaj, da je v priročniku 147 + 12 praktičnih primerov in da je vsak postopek, če je le bilo možno, ilustriran s primerom. Iz istega razloga je za reševanje nekaterih problemov danih več alternativnih rešitev z opisom, kdaj je prikladnejša ena ali druga rešitev.

Primeri so bili vzeti predvsem iz gradiva DAT srednješolske mladine v LRS, ki ga je dal na razpolago Zavod za proučevanje organizacije dela in varnosti pri delu LRS. Nekaj primerov sem vzel tudi iz gradiva o raziskovanju zaznavanja barv in likov predšolske mladine, ki ga je dal na razpolago tov. France Kovač, psiholog v Poklicni posvetovalnici v Kranju. Obema se na tem mestu zahvaljujem za pomoč, ki sta mi jo s tem nudila.

Dr. Marijan Blejec

Ljubljana, oktobra 1957.

0 MASOVNI POJAVI

01. Masovni pojavi

Pojavi v družbi in prirodi ne nastopajo posamič, temveč v velikem številu, ne izolirano, pač pa se medsebojno povezujejo in vplivajo drug na drugega. Take pojave imenujemo masovne pojave. Z masovnim pojavom razumemo istovrsten pojav, ki v času in prostoru množično nastopa. Po tej definiciji je masoven pojav na primer človek, kmetijsko gospodarstvo, poizkus, ki ga večkrat izvajamo pod istimi pogoji, in tako dalje. Zaradi specifičnosti masovnih pojavov se je razvila posebna metoda proučevanja masovnih pojavov — statistika, ki se bistveno razlikuje od drugih metod proučevanja pojavov. Statistika se je razvila v vedo, ki s kvantitativnim proučevanjem masovnih pojavov s specifičnimi metodami odkriva kvalitativne zakonitosti teh pojavov. Ker imamo opravka z masovnimi pojavi v najrazličnejših področjih, je statistika postala važno orodje proučevanja v velikem številu znanosti, med drugimi tudi v psihologiji.

02. Populacija. Enota

V mnogih primerih raziskovalca ne zanima ena sama oseba, niti vse človeštvo, temveč določena skupina ljudi, ki ima neke skupne karakteristike. To skupino enolično določimo tako, da povemo, katere osnovne značilnosti mora imeti posamezna oseba, da je član te skupine. Enako postopamo v vseh primerih masovnih pojavov.

Skupnost elementov, ki zadoščajo nekim osnovnim — *opredeljujočim pogojem*, imenujemo *statistično maso — populacijo*, posamezne elemente populacije pa *enote* populacije.

Primer 1. Kot populacijo moremo smatrati učence četrtega razreda gimnazij v LRS na dan 31. marca 1957. Enota te populacije je vsaka oseba, ki je bila 31. marca 1957 dijak četrtega razreda katerekoli gimnazije v LRS. Opredeljujoči pogoji te populacije pa so: vsebinski: oseba mora biti četrtošolec; krajevni: oseba mora biti v LRS; časovni: oseba mora biti četrtošolec v LRS na dan 31. marca 1957. Točno fiksiranje datuma je potrebno zaradi nedvoumne opredelitve; iz populacije izpadejo vsi tisti četrtošolci, ki so eventualno izstopili iz šole pred 31. marcem 1957 ali vstopili po tem datumu.

Primer 2. Kot drugi primer populacije moremo vzeti vsa testiranja osnovnošolskih otrok, izvedena v letu 1956 v Ljubljani s testom mehanskih zmožnosti. Enota populacije je posamezno testiranje. Opredeljujoči pogoji populacije pa so: vsebinski: testiranje osnovnošolskih otrok z mehanskim testom; krajevni: Ljubljana; časovni: leto 1956.

03. **Znaki**

Razen z opredeljujočimi pogoji je posamezna enota populacije karakterizirana z nizom značilnosti, ki jo opisujejo. Tako so značilnosti, ki karakterizirajo posamezno osebo, na primer: starost, spol, šolska izobrazba, poklic, število točk, ki jih je oseba dosegla pri določenem testu, čas, v katerem je izvršila nalogo, ki jo določa gornji test, številka čevljev, ki jih nosi, in tako dalje. Značilnosti, ki karakterizirajo določeno osebo, je nešteto. Čim več značilnosti te osebe je znanih, tem bolje jo poznamo.

Vendar nas pri konkretni raziskavi ne zanimajo vse značilnosti. Katere od njih so važne, je odvisno od problema, ki ga proučujemo. Če izdelujemo testne norme zmožnosti, nas zanimajo dosežki pri testu, prav nič pa ne, kakšno številko čevljev ima testirana oseba. Obratno nas pri analizi velikosti nog za potrebe čevljarske industrije zanima številka čevljev posameznih ljudi, prav nič pa ne, koliko točk je anketirana oseba dosegla pri testiranju besednih zmožnosti. Izmed vseh možnih značilnosti izberemo in opazujemo v vsakem primeru one, ki so v zvezi z vsebino in ciljem raziskovanja. Te značilnosti imenujemo s skupnim imenom *statistični znaki.*

Primer 3. Pri DAT (diferencialnem testiranju zmožnosti) srednješolske mladine v LRS 1957. leta smo opazovali naslednje znake: spol, razred in število doseženih točk pri posameznem izmed sedmih različnih testov.

Vsak statistični znak ima določeno število *vrednosti.* Tako ima znak spol dvoje možnih vrednosti: moški, ženski; znak stan štiri: samski, poročen, razveden, ovdovel; starost v letih okrog sto različnih vrednosti; število doseženih točk pri danem testu vsa cela števila med najnižjim in najvišjim možnim številom točk, in tako dalje. Posamezna enota je karakterizirana z eno izmed možnih vrednosti znaka. Karakteristično za znake je, da ima po pravilu vsaka enota drugo vrednost znaka. Osebe, ki smo jih testirali, so različno stare, pri testu so dosegle različne dosežke in tako dalje.

Pravimo, da znaki variirajo. To lastnost znakov imenujemo *variabilnost* znakov. Enote populacije variirajo v vseh znakih z izjemo opredeljujočih pogojev.

Znaki dajo statističnim enotam in populaciji vsebino in masovne pojave proučujemo in analiziramo s pomočjo proučevanja in analiziranja statističnih znakov. Zaradi tega sta izbira znakov in tudi način analize znakov izredno važna. Od tega je namreč odvisno, ali bo raziskovanje dalo odgovor na vprašanja, zaradi katerih je bilo izvedeno.

03.1 Vrste znakov

Znake delimo po vsebini v tri skupine: *krajevne, časovne* in *stvarne*. Krajevni znaki so vsi znaki, ki so v zvezi s krajem, kjer se enota nahaja ali se je nahajala, časovni so v zvezi s časom, ko se je zgodil kak dogodek, ki je za enoto važen (na primer čas rojstva), vsi drugi znaki pa so stvarni. V psihologiji pridejo kot predmet proučevanja v poštev predvsem stvarni znaki. Vrednosti nekaterih stvarnih znakov izražamo z besedami (n. pr. spol: moški, ženski; socialna skupina: delavec, kmet, uslužbenec itd.; mnenje o določenem problemu: popolnoma soglasen, soglasen, indiferenten, se ne strinja, nasproten). Take znake imenujemo *atributivne* za razliko od *numeričnih*, katerih vrednosti izražamo s števili (n. pr. starost, število doseženih točk, čas testiranja itd.).

Numerične znake delimo glede na to, ali morejo na številčni premici zavzeti na danem intervalu vse ali samo nekatere vrednosti na *zvezne — kontinuirne* (n. pr. starost, čas reševanja naloge) in *nezvezne — diskontinuirne* (n. pr. število otrok v družini, število pravilno rešenih nalog).

Zvezni znaki morejo teoretično zavzeti vse vrednosti na nekem odseku številčne premice. Vendar se glede na potrebe in zmožnosti merjenja v praksi običajno ustavimo pri določeni natančnosti. Tako merimo na primer višino učencev v cm, čas v sekundah ali minutah itd., čeprav bi teoretično mogli čas in višino meriti tudi natančneje. Pri tem računamo vse učence, katerih višina je med 95,50 cm in 96,50 cm kot 96 cm visoke. Vrednosti znaka se pri tem »zaokroževanju« spremene v nezvezen niz 90 cm, 91 cm, 92 cm, 93 cm ... Te vrednosti predstavljajo vse vrednosti v intervalih enega centimetra in ne samo eno vrednost. Enaka situacija je pri vseh zveznih numeričnih znakih. Čeprav bi mogli teoretično vrednosti zveznih numeričnih znakov določati poljubno natančno, se glede na potrebe in zmožnosti merilnih instrumentov vedno zaustavljamo pri dani natančnosti, pri kateri vrednosti zaokrožujemo in enačimo v okviru tega zaokroževanja. Vse vrednosti takega elementarnega intervala karakteriziramo z vrednostjo, ki leži v sredini tega intervala.

Glede na to, ali želimo, da so zaokrožene vrednosti ali meje elementarnih intervalov okrogla števila, je zaokroževanje vrednosti zveznih znakov dvojno. Tako moremo formirati razred 90,50 cm do 91,50 cm z vrednostjo 91 cm kot karakteristično vrednostjo, ali po celih centimetrih razred od 90,00 cm do 91,00 cm z 90,50 kot karakteristično vrednostjo. Pri konkretnih primerih je treba pri uporabi zaokroženih vrednosti paziti, ali je bil pri zaokroževanju upoštevan prvi ali drugi princip.

Nezvezni znaki morejo zavzeti samo nekatere, običajno cele vrednosti na številčni premici. Medtem ko so zvezni znaki navadno rezultat merjenja, so nezvezni znaki običajno rezultat preštevanja. Število pravilno rešenih nalog more biti 0, 1, 2, 3, ..., število otrok v družini 0, 1, 2, ..., ne pa neka vmesna vrednost.

Iz tehničnih razlogov obdelave statističnih podatkov običajno teoretično vzamemo, da so tudi vrednosti nezveznih znakov razporejene na zvezni številčni premici. Pri tem koordiniramo vsaki vrednosti nezveznega znaka interval enotine širine, tako da je vrednost nezveznega znaka v sredini enotinega elementarnega intervala. Tako smatramo, da vrednost 1 reprezentira vse vrednosti na intervalu 0,5 do 1,5, vrednost 2 vse vrednosti na intervalu 1,5 do 2,5 in tako dalje.

S tem da smo elementarnim intervalom zveznih znakov dali sredino razreda kot karakteristično vrednost in vrednostim nezveznih znakov enotin elementarni interval okrog te vrednosti, smo zvezne in nezvezne znake glede na obdelavo izenačili.

Značilnost numeričnih znakov je številčna oblika vrednosti. Ta lastnost je s stališča kvantitativne obdelave velikega pomena, ker moremo vrednosti numeričnih znakov med seboj primerjati, iskati razlike in z njimi vršiti najrazličnejše računske operacije. Ne najmanjša prednost je tudi ta, da moremo vrednosti numeričnih znakov enolično razvrstiti po velikosti. Vseh teh lastnosti *atributivni znaki* nimajo. Razlik med njimi ni možno izražati tako kot pri numeričnih, ker so vrednosti dane z besedami. Enako v splošnem ne moremo vrednosti atributivnih znakov razporediti v enoličen vrstni red po velikosti in tako dalje. To pa ne velja strogo za vse atributivne znake. Nekateri atributivni znaki imajo numerično osnovo, kljub temu da jih izražamo z besedami. Tak znak je na primer znak pogostost, ki jo lahko izražamo bodisi numerično s številom, kolikokrat se je dogodek zgodil, ali atributivno z vrednotenjem: nikoli, včasih, redno, pogosto in vedno. Ta znak, čeprav izražen atributivno, ima lastnost, da moremo njegove vrednosti razvrstiti po velikosti, ker je njegova osnova numerična. Tudi znak stopnja šolske izobrazbe je možno razvrstiti po velikosti v stopnje: brez šolske izobrazbe, nedokončana osnovna šola, dokončana osnovna šola, nedokončana nižja srednja šola, dokončana nižja srednja šola, nedokončana višja srednja šola, dokončana višja srednja šola, nedokončana visoka šola in dokončana visoka šola. Razvrstitev je možna, ker je v osnovi stopnje šolske izobrazbe dolžina šolanja, ki pa je numeričen znak. V psihologiji nastopa veliko število znakov, katere smatramo kot atributivne in izražajo večkrat zelo abstraktne pojme, kot so na primer: ubogljivost, pridnost, poštenost, državljanska zavest, kvaliteta umetniškega dela, smešnost šale, inteligenca, zmožnost, zbranost pri delu, spomin, prilagodljivost in tako dalje. Za vse te znake je težko reči, ali so atributivni ali numerični, ali jih je sploh možno definirati. Običajno jih izražamo atributivno, vendar s prilastki: sploh ne, bolj, manj, čisto, zelo, malo, in tako dalje, kar pa so tipično numerični prilastki. Poleg tega je vrednosti teh znakov za konkretne primere težko določiti in je mnenje o teh stopnjah zelo subjektivno. Vendar je možno, kot bomo videli kasneje, tem znakom pod določenimi predpostavkami dati numerični izraz in jih torej moremo šteti tudi med čisto numerične znake.

03.2 **Grupiranje vrednosti znakov**

Število vseh možnih vrednosti precejšnjega števila znakov je za pregledno prikazovanje preveliko. V teh primerih sorodne vrednosti grupiramo v grupe, posamezna grupa pa služi kot nova vrednost znaka. Grupirati moremo tako atributivne kot numerične znake. Vse vrste delavskih poklicev moremo na primer grupirati v grupo, ki ji damo vrednost znaka »delavec«, vse vrste uslužbencev v grupo, ki jo zaznamujemo z »uslužbenec«, in tako dalje. Tako atributiven znak z ogromnim številom vrednosti z grupiranjem prevedemo v znak z razmeroma majhnim številom vrednosti. S tem sicer trpi preciznost, preglednost pa je boljša.

Sorodnost med vrednostmi numeričnih znakov je dana z razliko. Tako smatramo, da je na primer vrednost »dva člana družine« sorodnejša vrednosti »trije člani družine« kot pa vrednost »šest članov družine«. Grupe numeričnih znakov imenujemo *razrede*. Vsak razred ima svoj *razredni interval*, to je interval, v katerem so vse vrednosti razreda. *Spodnja* in *zgornja meja razreda* sta vrednosti, med katerima leže vse vrednosti razreda, a nobena vrednost drugega razreda. *Sredina razreda* je vrednost, ki leži točno v sredini razrednega intervala in je reprezentant vseh vrednosti razreda, *širina razreda* pa je merjena z velikostjo razrednega intervala. Ako zaznamujemo z $x_{k,min}$ spodnjo mejo splošnega razreda, ki ga imenujmo razred k, z $x_{k,max}$ pa zgornjo mejo istega razreda, izračunavamo sredino razreda x_k po obrazcu

$$x_k = \frac{x_{k,min} + x_{k,max}}{2} \tag{1}$$

širino razreda i_k pa po obrazcu

$$i_k = x_{k,max} - x_{k,min} \tag{2}$$

Če ni drugega posebnega vsebinskega razloga, formiramo razrede z enakimi širinami. Razredi z enakimi širinami imajo pri obdelavi in analizi podatkov veliko prednost.

Meje serije razredov z enakimi širinami i dobimo enostavno s sukcesivnim prištevanjem širine razreda spodnji meji najnižjega razreda po obrazcu

$$x_{k+1,min} = x_{k,min} + i \tag{3}$$

serijo sredin razredov pa enako, če sukcesivno prištevamo širino razreda sredinam razredov, začnemo pa s prvim razredom. Ta postopek je nakazan v obrazcu

$$x_{k+1} = x_k + i \tag{4}$$

Grupacija vrednosti znaka mora biti taka, da vsaka vrednost pade v en in en sam razred.

Primer 4. Grupe nezveznega znaka »dosežene točke pri testiranju« so takele:

Razred	Sredina razreda
0 do 4	2
5 do 9	7
10 do 14	12
15 do 19	17
20 do 24	22
25 do 29	27
...	...

Širina vseh razredov je enaka, zato smo dobili meje razredov in sredine razredov s sukcesivnim prištevanjem $i = 5$ posameznim vrednostim. Sredina prvega razreda je na primer

$$x_1 = 2;\ x_2 = x_1 + i = 2 + 5 = 7$$
$$x_3 = x_2 + i = 7 + 5 = 12;\ \text{itd.}$$

Paziti pa je treba, da širina razreda v našem primeru ni $4 - 0 = 4$, temveč $4{,}5 - (-0{,}5) = 5$, ker so meje razredov zaradi enotinih intervalov okrog nezveznih vrednosti —0,5, 4,5, 9,5, 14,5 ...

Primer 5. Kot primer grupiranja zveznega znaka vzemimo »čas rešitve dane naloge«. Vzemimo najprej, da je čas zaokrožen na minute. V nadaljevanju so navedeni za isto grupacijo trije načini. Minute so zaznamovane z ′. Prvo vprašanje je, kako je bil čas zaokroževan. Če je bil zaokroževan kot pravimo »polovico navzgor in navzdol«, pomeni 9′ vse čase med 8′31″ in 9′30″, če pa je bil zaokroževan na izpolnjene minute, pa 9′ pomeni vse čase med 9′00″ in 9′59″. V zaokroževanju je torej bistvena razlika. Vzemimo, da smo v našem primeru zaokroževali čas po drugem principu — principu izpolnjenih minut. Zaradi tega so možne s temi podatki naslednje grupacije

A	B	C
5′ do 10′	5′ do 9′	5′ do pod 10′
10′ do 15′	10′ do 14′	10′ do pod 15′
15′ do 20′	15′ do 19′	15′ do pod 20′
20′ do 25′	20′ do 24′	20′ do pod 25′
...	...	...

Prva grupacija je nepravilna, ker se razredi prekrivajo, in ne zadošča pogoju, da mora vsaka vrednost pasti v en sam razred. Tako na primer čas 15′35″ pade istočasno v drugi in tretji razred. Grupaciji B in C sta enaki, le da sta pisani v različnih oblikah. Prva predpostavlja poznavanje sistema zaokroževanja na minute, medtem ko to v drugem primeru ni potrebno. Širina razredov je enaka za vse razrede in je

$$x_{1,max} - x_{1,min} = 10' - 5' = 5'$$

sredine razredov pa dobimo takole:

$$x_1 = \frac{5' + 10'}{2} = 7'30''; \; x_2 = 7'30'' + 5' = 12'30''; \; x_3 = 17'30'' \ldots$$

Ob tej priliki je treba opozoriti, da navedene grupacije ne bi mogli sestaviti, če bi bilo zaokroževanje časov izvedeno po alternativnem sistemu.

Če bi bili časi dani na sekunde natančno, bi bile iste grupacije časa takele:

5'00" do 9'59"	5'01" do 10'00"
10'00" do 14'59"	10'01" do 15'00"
15'00" do 19'59"	15'01" do 20'00"
20'00" do 24'59"	20'01" do 25'00"
...	...

Da so razredi enako široki, vidimo iz serije mej, ki se v vseh primerih enakomerno večajo za 5'.

Ker imajo statistični znaki v statistiki isti značaj in vlogo kot spremenljivke v matematiki, jih označujemo s simboli x, y, z in tako dalje.

1 UREJEVANJE PODATKOV

11. Urejevanje numeričnih podatkov

11.0 Frekvenčna distribucija

Podatki statističnega opazovanja, to je anketiranja, masovnega testiranja in podobno, so dani v nepregledni obliki individualnih podatkov. Te rezultate imamo dane bodisi na individualnih obrazcih za vsako enoto posebej ali pa za več ali vse enote populacije na enem — kolektivnem obrazcu. Pregled nad temi podatki dobimo šele, ako jih uredimo. Ena izmed običajnih oblik urejenih podatkov je *frekvenčna distribucija*. V frekvenčni distribuciji so po vrsti napisane posamezne vrednosti znaka, ki v populaciji nastopajo, poleg njih pa dane *frekvence*, to je število enot, ki imajo dano vrednost znaka. Frekvenco zaznamujemo na splošno s *f*. Kadar je število vseh vrednosti znaka, ki v populaciji nastopajo, veliko, individualne vrednosti znaka zamenjamo z razredi, frekvence pa v tem primeru pomenijo število enot, ki imajo vrednosti v ustrezajočih razredih.

Število razredov frekvenčne distribucije ne sme biti niti preveliko niti premajhno. Če je število razredov preveliko, je frekvenčna distribucija nepregledna, razen tega pa ne pridejo do izraza osnovne značilnosti pojavljanja vrednosti. Premalo razredov pa ima za posledico, da se značilnosti pojavljanja vrednosti zabrišejo. Število razredov frekvenčne distribucije vzamemo v praksi od 10 do 20, odvisno od tega, kako velika je populacija in v kakšne namene frekvenčno distribucijo formiramo.

Primer 6. V četrtem razredu postojnske gimnazije je bilo testiranih s testom mehanskega presojanja 20 dijakinj. Dosegle so naslednje število točk:

Tabela 1. Število doseženih točk pri testiranju mehanskih odnosov 20 četrtošolk postojnske gimnazije

33	26	13	11	19	16	29	21	41	12	28	30	14	15	18	13	34	13	32	23

Podatki, ki so vpisani v tabeli 1 po abecednem redu dijakinj, so nepregledni. V frekvenčni distribuciji moremo te podatke pisati v urejeni obliki.

Tabela 2. Frekvenčna distribucija 20 rezultatov testiranja dijakinj postojnske gimnazije s testom mehanskega presojanja

točke	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
frekvenca	1	1	3	1	1	1	—	1	1	—	1	—	1	—	—	1	—	1	1	1

točke	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
frekvenca	—	1	1	1	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—

Frekvenčna distribucija individualnih vrednosti znaka v tabeli 2 je dolga in zaradi tega nepregledna. Poleg tega so frekvence majhne in ne pride do izraza značilnost pojavljanja. Če tvorimo razrede po pet vrednosti, dobimo preglednejšo obliko frekvenčne distribucije.

Tabela 3. Frekvenčna distribucija 20 rezultatov testiranja mehanskih odnosov dijakinj postojnske gimnazije

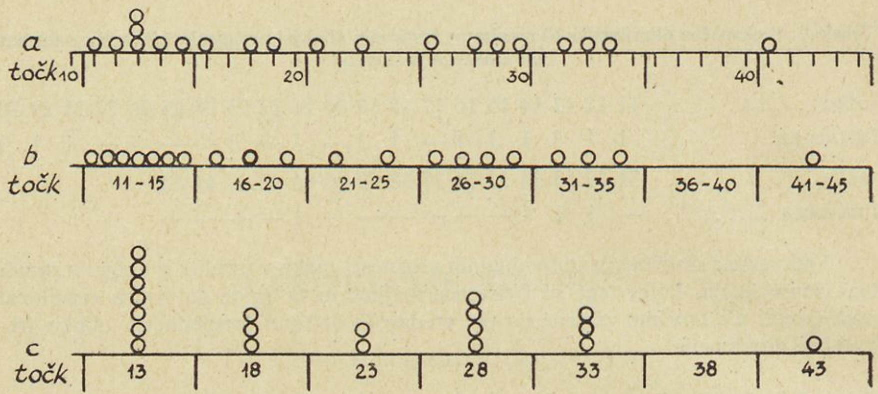
Število točk	f
11 do 15	7
16 do 20	3
21 do 25	2
26 do 30	4
31 do 35	3
36 do 40	–
41 do 45	1
	$N = 20$

Vsota vseh frekvenc je enaka skupnemu številu enot populacije, ki ga zaznamujemo z N (numerus).

Vrednosti populacije so v tabeli 3 dane v preglednejši obliki kot v tabeli 2, izgubili pa smo informacijo o vrednostih znaka znotraj razredov. Vemo le, da ima na primer sedem enot vrednosti med 11 in 15 točk, ne vemo pa točne vrednosti teh sedmih enot.

V tej situaciji običajno predpostavimo, da so vrednosti znotraj razredov po razrednem intervalu razporejene enakomerno ali da imajo vse enote enega razreda isto vrednost — sredino razreda. Bolj se približa stvarnosti prva predpostavka, druga pa je ugodnejša za računske operacije s frekvenčnimi distribucijami.

Primer 7. V sliki 1 so v prvi vrsti pod a) vrisane stvarne vrednosti podatkov iz tabele 1. V drugi vrsti pod b) so vrisane individualne vrednosti pri predpostavki enakomerne razporeditve v razredih. V tretji vrsti pod c) pa je nakazana razporeditev pod predpostavko, da vse vrednosti leže v sredini razredov. Iz slike vidimo, da se razporeditev b) veliko bolj približuje stvarnemu stanju a) kot razporeditev c).



Slika 1. Razmestitev 20 rezultatov testiranja zmožnosti mehanskega presojanja dijakinj postojnske gimnazije pri različnih predpostavkah: a) dejanska razmestitev, b) enakomerna razmestitev v razredih, c) enake vrednosti v razredih

11.1 Metode sestavljanja frekvenčnih distribucij

Tehnično moremo iz osnovnih podatkov sestaviti frekvenčno distribucijo na več načinov.

Po metodi črtkanja sestavimo frekvenčno distribucijo po naslednjih točkah: a) sestavimo obdelovalno tabelo, v kateri pustimo vsakemu razredu določeno polje; b) podatke vnašamo v obdelovalno tabelo tako, da za vsako vrednost včrtamo v ustrezajoči razred črtico; c) ko smo tako vnesli v obdelovalno tabelo vse podatke populacije, črtice v posameznih razredih preštejemo in jih vpišemo kot frekvence. Da si olajšamo končno štetje črtic, tvorimo grupe po pet črtic po naslednjem sistemu: ~~////~~.

Primer 8.

Tabela 4. Sestavljanje frekvenčne distribucije rezultatov testiranja iz tabele 1 po metodi črtkanja

Število točk	Črtice	f
11 do 15	~~////~~ //	7
16 do 20	///	3
21 do 25	//	2
26 do 30	////	4
31 do 35	///	3
36 do 40		–
41 do 45	/	1
		$N = 20$

Po metodi **sortiranja listkov** sestavimo frekvenčno distribucijo tako, da: a) individualne listke s podatki za posamezne enote po vrednostih znaka razdelimo v grupe, b) listke v posameznih grupah preštejemo in dobimo frekvence razredov.

Metodo črtkanja uporabljamo pri majhnih populacijah in pri manj kompliciranih obdelavah. Pri tem načinu so namreč velike možnosti pomot, ki jih moremo popraviti edino s ponovno obdelavo. Zaradi tega večkrat večje populacije razdelimo v manjše dele, vsak del posebej obdelamo, rezultate pa na koncu združimo v frekvenčno distribucijo populacije. Vendar je za večje populacije in bolj komplicirane obdelave priporočljivejši drugi način, pri katerem je možnost odkrivanja pomot večja.

11.2 Distribucija relativnih frekvenc

Absolutne frekvence so odvisne od tega, na kateri razred se nanašajo, in od velikosti populacije. Da odstranimo vpliv velikosti populacije na frekvenco, izračunavamo *relativne frekvence*, ki v obliki koeficientov f^0, odstotkov $f^0/_0$ ali promilov $f^0/_{00}$ pokažejo, koliki del vrednosti populacije leži v posameznem razredu. Relativne frekvence izračunavamo glede na to, katero od zgornjih oblik iščemo, po obrazcih

$$f^0 = \frac{f}{N} \quad (5); \qquad f^0/_0 = 100\frac{f}{N} \quad (6); \qquad f^0/_{00} = 1000\frac{f}{N} \quad (7)$$

Relativne frekvence omogočajo zelo dobro primerjavo populacij z različnim številom enot.

Primer 9.

Tabela 5. Distribuciji absolutnih in relativnih frekvenc za rezultate testiranja računskih zmožnosti dečkov in deklic četrtega razreda gimnazij v LR Sloveniji (DAT LRS 1957)

Število točk	Frekvenca absolutna M f	Frekvenca absolutna Ž f	Frekvenca relativna M $f^0/_0$	Frekvenca relativna Ž $f^0/_0$
—3 do 0	1	9	0,1	0,6
1 do 4	24	59	2,0	3,6
5 do 8	79	150	6,8	9,2
9 do 12	176	290	15,1	17,7
13 do 16	180	358	15,4	22,0
17 do 20	294	372	25,2	22,8
21 do 24	193	238	16,6	14,6
25 do 28	115	131	9,8	8,0
29 do 32	64	17	5,5	1,0
33 do 36	35	7	3,0	0,5
37 do 40	6	—	0,5	—
	1167	1631	100,0	100,0

Relativne frekvence so bile izračunane, kot kaže primer:

$$100 \frac{358}{1631} = 22{,}0 = f\,\%$$

Isti rezultat bi bil pisan v obliki koeficienta $f^0 = 0{,}220$, v promilih pa $f\,‰ = 220$.

11.3 Grafično prikazovanje frekvenčnih distribucij

11.31 Histogram. Poligon. Frekvenčne distribucije moremo grafično prikazovati na dva načina: s *histogrami* in *poligoni.*

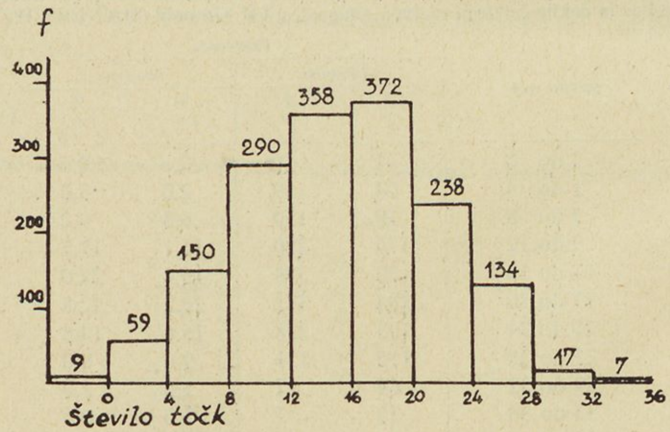
S *histogramom* grafično prikažemo frekvenčno distribucijo tako, da drugega poleg drugega rišemo *stolpce* — pravokotnike, katerih višina je v sorazmerju s frekvenco v razredih. Širina stolpcev je za distribucije, katerih razredi so enako široki, enaka.

S *poligonom* pa prikažemo frekvenčno distribucijo tako, da nad sredino posameznega razreda napravimo točko, ki je od abscise oddaljena v sorazmerju s frekvenco. Če te točke med seboj povežemo, dobimo lomljeno črto — poligon, ki dobro ponazori razmestitev vrednosti znaka populacije.

Poligon bolje prikazuje razmestitev vrednosti kot histogram, ker predpostavlja znotraj razredov razmestitev, ki je realnejša kot enakomerna razmestitev, ki jo ima za osnovo histogram.

Na oba načina moremo prikazovati tako distribucije absolutnih kot relativnih frekvenc.

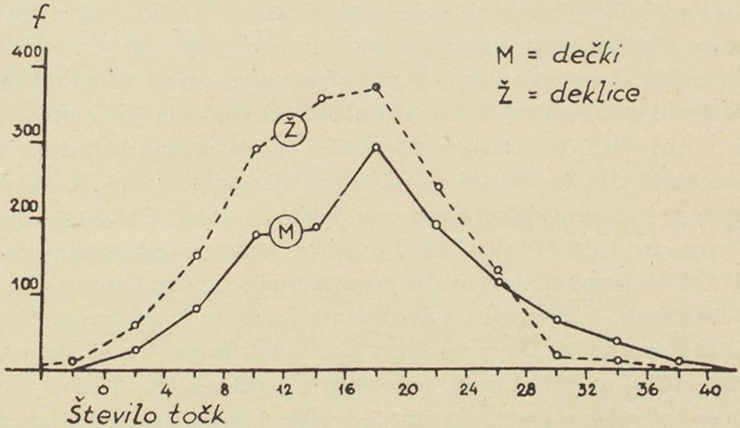
Primer 10.



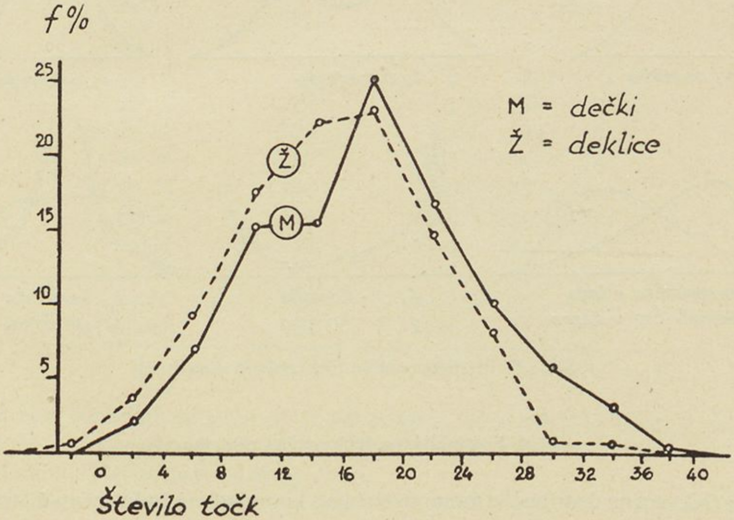
Slika 2. Histogram frekvenčne distribucije za rezultate testiranja računskih zmožnosti deklic četrtega razreda gimnazij v LRS

Za primerjavo več frekvenčnih distribucij so poligoni prikladnejši kot histogrami.

Primer 11. Iz slik 3 in 4 vidimo, da grafikon relativnih frekvenc bolje ponazarja odnose in razlike med populacijami kot grafikon absolutnih frekvenc.

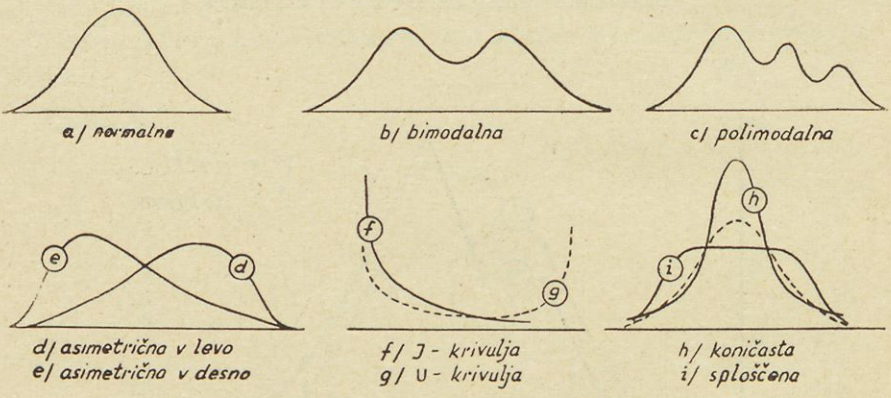


Slika 3. Frekvenčna poligona absolutnih frekvenc rezultatov testiranja računskih zmožnosti četrtošolcev v LR Sloveniji



Slika 4. Frekvenčna poligona relativnih frekvenc rezultatov testiranja računskih zmožnosti četrtošolcev v LR Sloveniji

11.32 Oblike frekvenčnih distribucij. Frekvenčna distribucija je prikaz variiranja znaka, variacija pa je rezultat individualnih faktorjev, ki vplivajo na posamezne enote. Ti vplivi so najrazličnejši in imajo za posledico različne oblike frekvenčnih distribucij za posamezne znake. Oblika frekvenčne distribucije je prav posebno razvidna iz grafičnega prikaza. Ne da bi se spuščali v analizo bomo navedli nekaj karakterističnih oblik frekvenčnih distribucij. Kot idealno frekvenčno distribucijo smatramo normalno distribucijo (sl. 5a), ki ima v statistiki posebno važno vlogo in jo bomo še podrobneje obravnavali. Zanjo rečemo, da je unimodalna, ker ima samo en vrh, simetrična, ker enako in enakomerno pada od sredine v obe smeri, in zvonasta. Za razliko od nje imamo bimodalne (sl. 5b), polimodalne (sl. 5c), če ima dva ali več vrhov, asimetrične v levo (sl. 5d) ali desno (sl. 5e), če se frekvence vlečejo v eno smer bolj kot v drugo. Frekvenčne distribucije imajo zvonasto, J (sl. 5f) ali U (sl. 5g) obliko, glede na podobnost z zvonom ali črkami J ali U. Izmed teh treh so zelo pogoste zvonaste, manj J-distribucije, najmanj pa U-distribucije. V primerjavi z normalno krivuljo, ki jo smatramo kot idealno, imamo še koničaste (sl. 5h) in sploščene (sl. 5i) distribucije. Vzroki, da nastopi ena ali druga oblika, so najrazličnejši: nehomogena populacija ima za vzrok lahko tako asimetrijo kot polimodalnost, okrnjeno delovanje določenih faktorjev ima za posledico asimetričnost ali J obliko, in tako dalje.



Slika 5. Različne oblike frekvenčnih distribucij

11.4 Kumulativna frekvenčna distribucija

Iz frekvenčne distribucije moremo izpeljati kumulativno frekvenčno distribucijo *F* po naslednjem postopku:

a) V najnižji razred vpišemo 0, ker je kumulativa tega razreda vedno 0.

b) Kumulativo drugega razreda dobimo, če vrednosti kumulative prvega razreda 0 prištejemo frekvenco prvega razreda. To kumulativno vrednost vpišemo v koloni kumulativ v drugi razred. Kumulativno vrednost tretjega razreda dobimo, če kumulativni vrednosti drugega razreda prištejemo frekvenco drugega razreda. S sukcesivnim prištevanjem frekvenc kumulativam nadaljujemo do konca frekvenčne distribucije. Zadnji člen kumulativne frekvenčne distribucije je po vrednosti enak N in pade v vrsto »skupno« frekvenčne distribucije. To je obenem kontrola pravilnega izračunavanja kumulative.

Princip izračunavanja členov kumulativne distribucije moremo opisati v obliki obrazca

$$F_{k+1} = F_k + f_k \tag{8}$$

Pri tem pomeni F_k in F_{k+1} k-ti in $k+1$-ti člen kumulative, f_k pa k-ti člen frekvenčne distribucije.

Posamezni členi kumulative povedo, koliko enot v populaciji ima vrednost znaka, ki je manjša kot spodnja meja razreda, na katerega se kumulativa nanaša.

Primer 12. Da vidimo postopek izračunavanja kumulativne serije, bomo nakazali izračunavanje kumulativ za eno izmed frekvenčnih distribucij iz tabele 5.

Tabela 6. Izračunavanje kumulative iz frekvenčne distribucije rezultatov testiranja računskih zmožnosti četrtošolcev v LR Sloveniji

Točke	f_k	$F_k + f_k = F_{k+1}$
–3 do 0	1	0
1 do 4	24	0 + 1 = 1
5 do 8	79	1 + 24 = 25
9 do 12	176	25 + 79 = 104
13 do 16	180	104 + 176 = 280
17 do 20	294	280 + 180 = 460
21 do 24	193	460 + 294 = 754
25 do 28	115	754 + 193 = 947
29 do 32	64	947 + 115 = 1062
33 do 36	35	1062 + 64 = 1126
37 do 40	6	1126 + 35 = 1161
	1167	1161 + 6 = 1167 = N

Šesti člen kumulativne serije $F_6 = 460$ pomeni, da je od 1167 skupno testiranih četrtošolcev 460 doseglo manj kot 16,5 oziroma v celih vrednostih 16 ali manj točk. Enako moremo sklepati tudi za druge člene.

Kumulative moremo v primeru, da jih računamo na računski seštevalni stroj z registrirnim trakom, računati zelo enostavno s sukcesivno uporabo »subtotala«.

11.5 Grafično prikazovanje kumulativnih serij

Podobno kot smo s poligoni prikazali frekvenčno distribucijo, moremo prikazati tudi kumulativno serijo. Vrednosti členov kumulativne serije nanašamo nad začetke ustrezajočih razredov s točkami, ki so od abscise oddaljene v sorazmerju z velikostjo kumulative. Če te točke med seboj povežemo, dobimo lomljeno črto, ki venomer narašča in ima tipično obliko črke S, če je frekvenčna distribucija unimodalna (z enim samim vrhom). Grafikon kumulativne serije omogoča za razliko od tabele oceno števila enot, ki leže pod katerokoli vrednostjo znaka (sl. 6a). Obratno moremo, če imamo dano število ali odstotek enot, najti tisto vrednost znaka, od katere ima to število ali odstotek enot manjše vrednosti (sl. 6b).

Primer 13. Ker moremo kumulativne serije računati tako iz absolutnih kot relativnih frekvenčnih distribucij, bomo grafično prikazali seriji relativnih frekvenc rezultatov testiranja računskega presojanja iz tabele 5.

Tabela 7. Kumulative relativnih frekvenc iz tabele 5

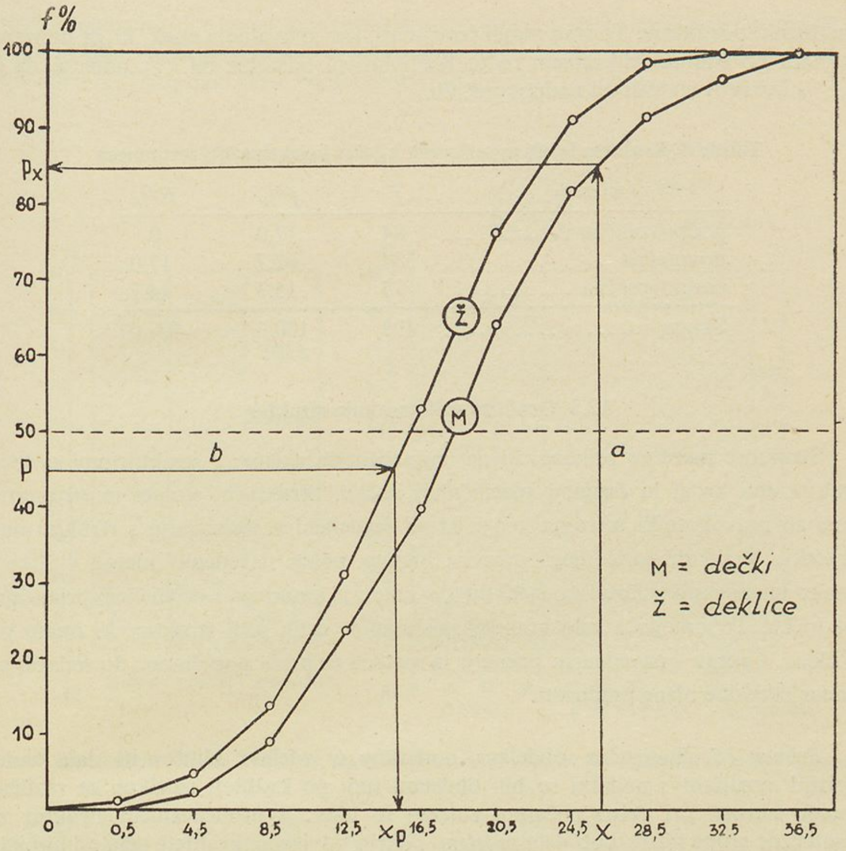
x	Dečki $f\%$	Dečki $F\%$	Deklice $f\%$	Deklice $F\%$
–3 do 0	0,1	0	0,6	0
1 do 4	2,0	0,1	3,6	0,6
5 do 8	6,8	2,1	9,2	4,2
9 do 12	15,1	8,9	17,7	13,4
13 do 16	15,4	24,0	22,0	31,1
17 do 20	25,2	39,4	22,8	53,1
21 do 24	16,6	64,6	14,6	75,9
25 do 28	9,8	81,2	8,0	90,5
29 do 32	5,5	91,0	1,0	98,5
33 do 36	3,0	96,5	0,5	99,5
37 do 40	0,5	99,5	—	100,0
	100,0	100,0	100,0	100,0

Iz grafikona v sliki 6 sta razvidna tipična S oblika in način, kako moremo za dano vrednost znaka x odbrati iz grafikona ustrezajočo vrednost $F\%$ in obratno.

12. Urejevanje atributivnih znakov

12.1 Frekvenčne distribucije atributivnih podatkov

O frekvenčnih distribucijah v ožjem smislu govorimo le za distribucije vrednosti numeričnih znakov. Vendar je za atributivne znake problem popolnoma enak. Niz vrednosti atributivnega znaka in frekvenc ustrezajočih vrednosti je tehnično in



Slika 6. Kumulative relativnih frekvenc rezultatov testiranja računskih zmožnosti četrtošolcev v LR Sloveniji

vsebinsko popolnoma enak pravim frekvenčnim distribucijam. Frekvenčne distribucije atributivnih znakov na popolnoma analogen način sestavljamo po metodi črtkanja in metodi sortiranja listkov. Zanje moremo izračunavati relativne frekvence, ki jih v primeru, da računamo koeficiente, imenujemo strukturne deleže, v primeru odstotkov pa strukturne odstotke. Kumulativne serije moremo iz atributivnih serij računati le v primeru, če je možno atributiven znak razvrstiti po velikosti.

Primer 14. 493 oseb je izdelalo po predloženi šabloni iz žice obliko ključa. Z ocenami: podpovprečno, povprečno in nadpovprečno je bila ocenjena kvaliteta izdelkov. Podatki so bili obdelani po metodi črtkanja in sestavljena je bila frekvenčna distribucija, ki je dana v tabeli 8. V tabeli so dani še strukturni odstotki in kumulativa strukturnih odstotkov. To smo mogli izračunati, ker je kvaliteta znak, ki ga moremo razvrstiti po enoličnem vrstnem redu. Kumulativni odstotek 84,7 % pomeni, da je 84,7 % izdelkov slabših od nadpovprečnih.

Tabela 8. Kvaliteta izdelave poskusnih ključev kolektiva 493 testirancev

Kvaliteta	f	f%	F%
podpovprečna	84	17,0	0
povprečna	334	67,7	17,0
nadpovprečna	75	15,3	84,7
Skupaj	493	100,0	100,0

12.2 Grafično prikazovanje struktur

Strukture moremo prikazovati na najrazličnejše načine: s strukturnimi stolpci, strukturnimi krogi in drugimi specifičnimi načini. Strukturni stolpci in strukturni krogi so pravokotniki oziroma krogi, ki so razdeljeni v sorazmerju s strukturnimi odstotki. V slikah naslednjega primera imamo poleg navedenih metod v sliki 8 še tako imenovano trikotniško strukturo, v kateri je struktura s tremi členi prikazana kot točka. To omogoča zelo kompleksno analizo celih serij struktur, ki imajo po tri člene. Čeprav v navedenem primeru ta metoda ne pride popolnoma do veljave, so vendar razvidne njene prednosti.

Primer 15. Statistična obdelava podatkov o izdelavi ključev ni dala samo zgornjih rezultatov; podatki so bili obdelani tudi po kvaliteti izdelkov za različne stopnje hitrosti pri delu: počasen, zmeren in hiter. S proučevanjem struktur za posamezne grupe hitrosti pri delu moremo odkriti odvisnost kvalitete dela od hitrosti. V slikah 7, 8 in 9 so na različne načine prikazane iste serije struktur. Tako je možna primerjava za različne načine grafičnega prikazovanja istih podatkov.

Rezultati obdelave podatkov o hitrosti in kvaliteti izdelkov so prikazani v tabelah 10 in 11.

Tabela 10. Frekvenčna tabela izdelave ključev po kvaliteti za različne stopnje hitrosti pri delu

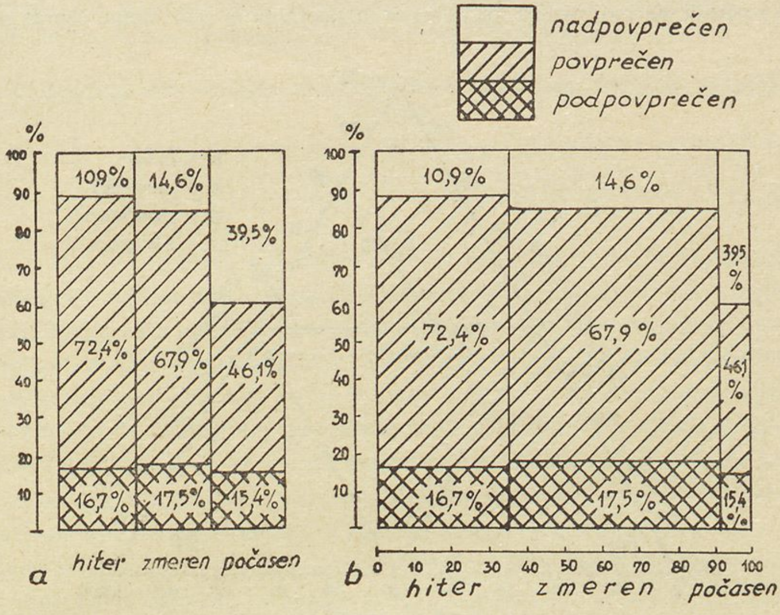
Kvaliteta / Hitrost	pp	p	np	sk
hiter	29	126	19	174
zmeren	49	190	41	280
počasen	6	18	15	39
Skupaj	84	334	75	493

Tabela 11. Strukturni odstotki kvalitete izdelave ključev za različne stopnje hitrosti pri delu

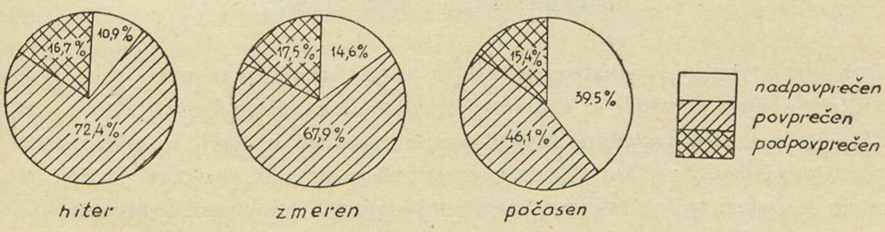
Kvaliteta / Hitrost	pp	p	np	sk
hiter	16,7	72,4	10,9	100,0
zmeren	17,5	67,9	14,5	100,0
počasen	15,4	46,1	39,5	100,0
Skupaj	17,0	67,7	15,3	100,0

Sliki 7a in 7b zelo nazorno prikažeta odvisnost kvalitete izdelkov od hitrosti. Primerjava struktur je lahka zaradi tega, ker so stolpci nanizani drug poleg drugega.

Razlika med sliko 7a in 7b je v tem, da so stolpci v sliki 7a enako široki, medtem ko so na sliki 7b širine stolpcev v sorazmerju z odstotkom enot za posamezno skupino hitrosti. Tako daje slika 7b dodatno informacijo.



Slika 7. Strukturni stolpci kvalitete izdelave poskusnih ključev po različnih stopnjah hitrosti

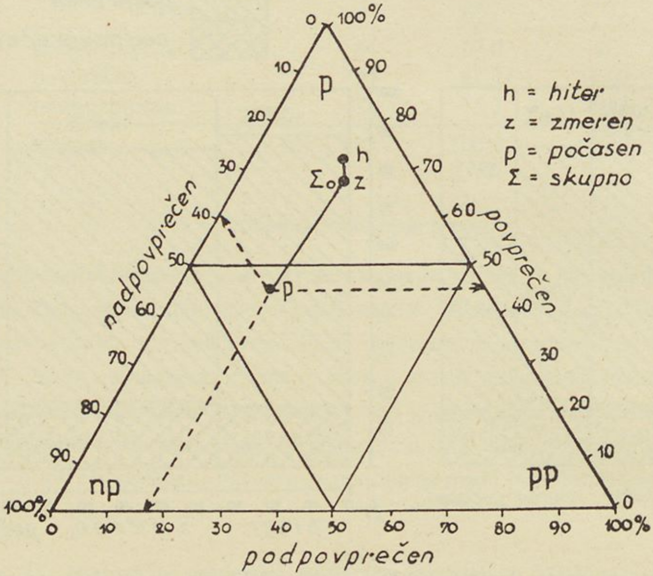


Slika 8. Strukturni krogi o kvaliteti izdelave poskusnih ključev po različnih stopnjah hitrosti

Primerljivost strukturnih krogov je slaba. Strukturne odstotke $f\%$ prevedemo v stopinje f° po obrazcu

$$f^{\circ} = 3,6 f\% \qquad (9)$$

Podatki tabele 11 so v sliki 9 prikazani s štirimi točkami. Kvalitete treh stopenj po hitrosti in skupna kvaliteta so predstavljene vsaka s posebno točko. Pri strukturni točki za grupo, ki je bila kategorizirana s »počasen«, je nakazano, kako odčitamo strukturne odstotke posameznih komponent kvalitete na treh skalah. Grafikon pokaže, da je struktura po kvaliteti za celotno populacijo zelo podobna strukturi za grupo zmernih, da tudi razlika med hitrimi in zmernimi ni zelo velika, čeprav se pri



Slika 9. Trikotniška struktura za kvaliteto izdelave poskusnih ključev po različnih stopnjah hitrosti

hitrih opaža tendenca poslabšanja kvalitete v primerjavi z zmernimi. Zelo pa je različna kvaliteta počasnih, ki kaže odločen odklon k nadpovprečnim. Celotno polje trikotnika je namreč razdeljeno na štiri manjše trikotnike, v katerih v vsakem izmed robnih prevladuje z več kot 50% ena izmed treh komponent strukture. Srednji trikotnik pa vsebuje točke struktur, v katerih nobena izmed komponent ne presega 50%.

13. **Kvantili**

13.1 **Ranžirna vrsta — rang**

Če ima populacija majhno število enot N, moremo dobiti pregled čez vrednosti, ki se v populaciji pojavljajo, tudi tako, da enote oziroma vrednosti uredimo po velikosti — razporedimo v *ranžirno vrsto*. Vsaki enoti oziroma vrednosti v ranžirni vrsti moremo prirediti glede na mesto enote v ranžirni vrsti *rang* R — to je zaporedno številko.

Primer 16. Ranžirna vrsta rezultatov testiranja s testom mehanskega presojanja 20 četrtošolk postojnske gimnazije iz tabele 1 je naslednja:

Tabela 12. Ranžirna vrsta rezultatov testiranja s testom mehanskega presojanja 20 dijakinj iz primera 6

Rang R	1	2	4	4	4	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Znak x	11	12	13	13	13	14	15	16	18	19	21	23	26	28	29	30	32	33	34	41

Rang ima vse lastnosti statističnih znakov: variira in vsaka enota populacije ima določeno vrednost ranga. Rang po svoje karakterizira enoto in daje o njej drugačno informacijo kot sama vrednost znaka. Če na primer vemo, da je izmed dvajset četrtošolk N. N. dosegla pri testiranju z mehanskim testom 33 točk, iz tega podatka ni razvidna dejanska zmožnost N. N. Iz njega ne moremo zaključiti, ali je glede na celoten kolektiv 20 dijakinj svojega razreda slaba ali dobra v presojanju mehanskih odnosov. Če pa vemo, da je v vrsti, urejeni od najmanjšega do največjega števila točk, izmed dvajsetih po rangu osemnajsta, vemo, da je njen dosežek v primerjavi s kolektivom velik in da sta samo dve dijakinji dosegli večje število točk.

Rang moramo navajati vedno v zvezi s številom enot populacije. Če tega ne bi storili, rang izgubi smisel in ne pokaže kakovosti enote. Če namreč ugotovimo, da je nekdo po uspehu pri delu 13. po rangu, to pomeni, da je v kolektivu 13 oseb najslabši, v kolektivu 25 oseb povprečen, v kolektivu 100 pa med najboljšimi. To je ena izmed hib ranga. Druga hiba ranga pa je v tem, da je razlika v zaporednih rangih vedno ena, ne glede na stvarno razliko med vrednostmi. Tako je na primer v tabeli 12 razlika med rezultatom prve in druge po rangu ena, med devetnajsto in dvajseto po rangu pa sedem točk.

Velika prednost rangov pa je med drugim tudi v tem, da se možnost kvantitativnega proučevanja podatkov razširi iz ozko numeričnih znakov tudi na tiste atributivne znake, ki so takšnega značaja, da jih moremo razvrščati po vrstnem redu. Po rangu moremo dijake na primer razvrščati po inteligenci, pridnosti, socialnem čutu; skladbe po kvaliteti, državljane po državljanski zavesti, izdelke po kvaliteti in tako dalje.

13.2 Kvantilni rang

Ker predpostavljamo kontinuirnost rangov, se razvrstijo rangi vseh enot populacije z N enotami na intervalu od 0,50 do $N + 0,50$. Širina tega intervala je N, torej je odvisna od velikosti populacije in je zaradi tega za vsako populacijo različna.

Ta odvisnost ranžirnega intervala od velikosti populacije pa je vzrok, da ne moremo sklepati na kvaliteto ranga že iz ranga samega.

Zaradi tega je prikladneje ranžirni interval meriti z enotinim merilom. Po tem principu vzamemo v vsakem primeru ranžirni interval širok 1, ne glede na velikost populacije. Rang, merjen s tem merilom, v *kvantilnih rangih P* pokaže kakovost mesta v ranžirnem intervalu. Če je na primer za neko enoto kvantilni rang $P = 0{,}50$, vemo iz tega podatka neposredno, da je enota v sredini ranžirne vrste, kvantilni rang $P = 0{,}06$ pa pove, da je ta enota na začetku ranžirne vrste in je samo 6 % enot, ki imajo manjše, in 94 % enot, ki imajo večje vrednosti. Kvantilni rang P torej pove, koliki del enot celotne populacije ima vrednosti manjše od P ustrezajoče vrednosti x_P.

13.3 **Določanje rangov**

Rang R preračunavamo v kvantilni rang P in obratno po obrazcih

$$P(R) = \frac{R - 0{,}5}{N} \tag{10}$$

$$R(P) = NP + 0{,}5 \tag{11}$$

Rang R za dano vrednost znaka x izračunamo po naslednjem postopku:

a) V ranžirni vrsti $x_1, x_2, x_3 \ldots$ poiščemo, med kateri vrednosti pade vrednost x, za katero iščemo rang;

$$x_k < x < x_{k+1}$$

b) Rang R izračunamo po obrazcu

$$R(x) = k + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \tag{12}$$

Vrednost znaka x pa pri znanem rangu R določimo takole:

a) Rang R razstavimo po obrazcu

$$R = k + u \tag{13}$$

v dva dela.

Pri tem pomeni k celo število, u pa decimalni ostanek ranga. Zaradi zveznega značaja ranga more biti namreč R tudi decimalno število.

b) V ranžirni vrsti poiščemo k ustrezajoči vrednosti x_k in x_{k+1}.

c) Rangu R ustrezajočo vrednost $x(R)$ izračunamo po obrazcu

$$x(R) = x_k + u(x_{k+1} - x_k) \tag{14}$$

Vrednost znaka x, ki ustreza določenemu kvantilnemu rangu P in obratno kvantilni rang P, ki ustreza dani vrednosti znaka x, izračunavamo posredno preko ranga R.

Nekatere vrednosti znaka x, ki ustrezajo določenim kvantilnim rangom, so posebno važne in jih imenujemo s posebnimi imeni:

$$
\begin{array}{llll}
x\,(P = 0{,}50) & = \mathrm{Me} = \textit{mediana} & & \\
x\,(P = 0{,}25\,q) & = \mathrm{Q_q} = \textit{kvartili} & q = 1, 2, 3, & \\
x\,(P = 0{,}10\,d) & = \mathrm{D_d} = \textit{decili} & d = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, & \\
x\,(P = 0{,}01\,c) & = \mathrm{C_c} = \textit{centili} & c = 1, 2, 3, \ldots 98, 99. &
\end{array}
$$

x_P, ki ustreza kateremu koli P, imenujemo na splošno *kvantil.* Mediana razdeli populacijo v dva, kvartili v štiri, decili v deset, centili pa v sto po obsegu enakih delov.

Primer 17. Ugotoviti je treba, kateri kvantilni rang P ima glede na kolektiv 20 dijakinj iz primera 16, vrednost $x = 27$.

Najprej določimo rang $R\,(x = 27)$. V ranžirni vrsti v tabeli 12 najdemo, da leži vrednost $x = 27$ med $x_{13} = 26$ in $x_{14} = 28$. Po obrazcu 12 dobimo:

$$R\,(x = 27) = 13 + \frac{27 - 26}{28 - 26} = 13{,}5$$

Iz tega rezultata pa dobimo po obrazcu 10

$$P\,(R = 13{,}5) = \frac{13{,}5 - 0{,}5}{20} = 0{,}65$$

$x = 27$ ustrezajoči kvantilni rang je $P = 0{,}65$.

Primer 18. Za podatke iz tabele 12 za rezultate testiranja mehanskega presojanja je treba izračunati kvartile.

S pomočjo ranžirne vrste v tabeli 12 dobimo z uporabo obrazcev 11, 13 in 14

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= x\,(P = 0{,}25) = x\,(R = 20 \cdot 0{,}25 + 0{,}5) = x\,(R = \ \ 5{,}5) = \\
&= 13 + 0{,}5\,(14 - 13) = 13{,}5 \text{ točke} \\
Me = Q_2 &= x\,(P = 0{,}50) = x\,(R = 20 \cdot 0{,}50 + 0{,}5) = x\,(R = 10{,}5) = \\
&= 19 + 0{,}5\,(21 - 19) = 20 \text{ točk} \\
Q_3 &= x\,(P = 0{,}75) = x\,(R = 20 \cdot 0{,}75 + 0{,}5) = x\,(R = 15{,}5) = \\
&= 29 + 0{,}5\,(30 - 29) = 29{,}5 \text{ točke}
\end{aligned}
$$

13.4 **Določanje kvantilov in rangov iz frekvenčnih distribucij**

Kumulativne frekvenčne distribucije so po svojem pomenu zelo podobne ranžirni vrsti, le da je rang dan samo za meje razredov. Iz kumulativne serije v tabeli 6 moremo sklepati, da je vrednost enote z rangom 1 ocenjena z $-0{,}5$, vrednost enote z rangom 25 ocenjena s 4,5, da ima enota z vrednostjo 8,5 rang 104 in tako dalje. Medtem ko dá kumulativna serija absolutnih frekvenc zvezo med rangom R in vrednostjo x, daje kumulativna serija relativnih frekvenc zvezo med kvantilnim rangom P in vrednostjo x.

Pod predpostavko, da so vrednosti v razredih frekvenčne distribucije enakomerno razvrščene, moremo iz frekvenčne distribucije izračunati danemu P ali R ustrezajoči kvantil po naslednjem postopku:

a) Če je dan kvantilni rang P, izračunamo najprej po obrazcu 15 R.

$$R = NP; \text{ (0,5 iz obrazca 11 zanemarimo)} \tag{15}$$

b) Iz frekvenčne distribucije izračunamo kumulativo.

c) V kumulativni seriji poiščemo, med kateri vrednosti kumulative F pade R.

$$F_0 < R < F_1$$

To zaznamujemo s horizontalno črto.

d) Razred nad horizontalno črto je kvantilni razred. Tega zaznamujemo z 0.

e) P oziroma R ustrezajočo vrednost kvantila izračunamo po obrazcu

$$x(R) = x_0 + \frac{R - F_0}{f_0} i_0 \tag{16}$$

Pri tem pomeni: $x(R)$ = rangu R ustrezajoči kvantil, x_0 = spodnja meja, i_0 = širina razreda, f_0 = frekvenca, F_0 = kumulativa kvantilnega razreda.

Dani vrednosti x ustrezajoči rang oziroma kvantilni rang pa dobimo po naslednjem postopku:

a) Poiščemo, v kateri razred pade vrednost x. Ta razred je kvantilni in ga zaznamujmo z 0.

b) Rang R, ki ustreza tej vrednosti, dobimo po obrazcu

$$R(x) = F_0 + (x - x_0) \frac{f_0}{i_0} \tag{17}$$

Pri tem pomeni: $R(x)$ = x-u ustrezajoči rang, x_0 = spodnja meja, i_0 = širina razreda, f_0 = frekvenca, F_0 = kumulativa kvantilnega razreda.

c) Iz ranga R dobimo kvantilni rang s pomočjo obrazca

$$P = \frac{R}{N}; \text{ (0,5 iz obrazca 10 je zanemarjen)} \tag{18}$$

Primer 19. Za populacijo rezultatov testiranja računskih zmožnosti četrtošolcev, ki so prikazani v frekvenčni distribuciji v tabeli 6, je treba izračunati naslednje količine: D_1, D_9, Q_1, Q_3, Me in C_{78}. Vse te količine izračunavamo po istem principu s pomočjo obrazca 15 in 16. Pri tem je: $D_1 = x\,(P = 0{,}10)$; $D_9 = x\,(P = 0{,}90)$; $Q_1 = x\,(P = 0{,}25)$; $Q_3 = x\,(P = 0{,}75)$; $Me = x\,(P = 0{,}50)$; $C_{78} = x\,(P = 0{,}78)$.

Tabela 13. Izračunavanje kvantilov iz frekvenčne distribucije rezultatov testiranja računskih zmožnosti četrtošolcev v LR Sloveniji

	x	f	F	
	–3 do 0	1	0	
	1 do 4	24	1	
	5 do 8	79	25	
	9 do 12	176	104	
0	13 do 16	180	280	
	17 do 20	294	460	
	21 do 24	193	754	0
	25 do 28	115	947	
	29 do 32	64	1052	
	33 do 36	35	1126	
	37 do 40	6	1161	
		1167	1167 = N	

Postopek bomo nakazali samo za C_{78}. $R\,(P = 0{,}78) = 1167 \cdot 0{,}78 = 910{,}26$. Vrednost 910,26 pade med sedmi in osmi kumulativni člen. V tabeli 13 je zaznamovan kvantilni razred 0. Iz njega dobimo: $x_0 = 20{,}5$; $i_0 = 4$; $f_0 = 193$; $F_0 = 754$.

Če te količine vstavimo v obrazec 16, dobimo

$$C_{78} = 20{,}5 + \frac{910{,}26 - 754}{193}\,4 = 23{,}78 \text{ točke}$$

Ostali rezultati, ki so bili podobno izračunani, so: $D_1 = 8{,}79$, $D_9 = 28{,}09$; $Q_1 = 12{,}76$; $Q_3 = 23{,}19$; $Me = 18{,}18$ točke.

Primer 20. Četrtošolec N. N. je bil testiran s testom računskih zmožnosti in pri tem dosegel $x = 15$ točk. Izračunati je treba centilni rang tega rezultata. Potrebna frekvenčna distribucija je že dana v tabeli 13. Rezultat 15 točk pade v peti razred, ki je zaznamovan v tabeli z 0 na levi strani. Za ta razred je: $x_0 = 12{,}5$; $i_0 = 4$; $f_0 = 180$; $F_0 = 280$. Iz teh podatkov dobimo po obrazcu 17

$$R\,(x = 15) = 280 + (15 - 12{,}5)\,\frac{180}{4} = 392{,}5$$

Kvantilni rang pa iz R dobimo po obrazcu 18

$$P = \frac{392{,}5}{1167} = 0{,}337$$

Če ta rezultat zaokrožimo, dobimo, da je centilni rang 34.

2 SREDNJE VREDNOSTI

20. Pojem

Vrednosti enot populacije se med seboj razlikujejo — znak variira. Pregled vrednosti populacije smo dobili s frekvenčno distribucijo. Slika frekvenčne distribucije rezultatov testiranja računskih zmožnosti četrtošolcev v sliki 2 kaže, da največ četrtošolcev dosega vrednosti okrog 17 točk, ker se vrednosti okrog tega mesta najbolj goste. Čim bolj pa se od te vrednosti oddaljujemo proti levi ali desni, se frekvence manjšajo. Ta vrednost je za populacijo karakteristična in jo moremo smatrati kot reprezentanta zmožnosti računskega presojanja četrtošolcev. Če bi namreč imeli na razpolago frekvenčno distribucijo rezultatov testiranja računskih zmožnosti osmošolcev, bi se frekvence gostile okrog druge vrednosti — verjetno višje, ki bi bila karakteristična za populacijo osmošolcev.

Posamezne vrednosti se od tega reprezentanta odklanjajo navzgor in navzdol. Analiza tega pojava pokaže, da je vrednost, ki jo smatramo kot reprezentanta, rezultat splošnih faktorjev, to je faktorjev, ki imajo enak učinek na vse enote, medtem ko so individualni odkloni posameznih enot rezultat individualnih faktorjev, katerih učinek se od enote do enote menja. Čim večji so individualni vplivi, tem bolj se vrednosti odklanjajo od reprezentativne srednje vrednosti in tem slabše srednja vrednost karakterizira populacijo in obratno, čim manjši so individualni vplivi, tem manjši so odkloni od srednje vrednosti in tem bolje srednja vrednost reprezentira populacijo. Srednja vrednost je le računska fikcija, če je populacija nehomogena ali če je variabilnost pojava prevelika, in v tem primeru nima praktične vrednosti. Znan je primer napačne uporabe srednje vrednosti: milijonar z 1,000.000 din in deset revežev, od katerih ima vsak po 10.000 din, imajo formalno vzeto povprečno po 100.000 din. Primer pokaže, da ta vrednost ni reprezentativna niti za enega niti za drugega in je zaradi tega nepravilno uporabljena.

Srednjih vrednosti imamo več. Od teh bomo obravnavali tri: mediano, modus in aritmetično sredino.

21. Mediana

Mediano že poznamo, ker je kvantil s kvantilnim rangom $P = 0{,}5$. Ker je mediana vrednost, od katere ima polovica enot manjše, polovica pa večje vrednosti, je zelo lahko razumljiva. Izračunavamo jo po načinih, ki smo jih navedli za izračunavanje kvantilov.

Slaba stran mediane je v tem, da je neodvisna od tega, kako se distribuirajo vrednosti v vsaki izmed polovic populacije, na kateri jo razdeljuje.

Primer 21. Za populacijo 20 četrtošolk smo za test mehanskega presojanja v primeru 18 dobili mediano $Me = 20$ točk.

Za test zmožnosti računanja četrtošolcev smo v primeru 19 dobili mediano $Me_M = 18{,}18$ točke. Za isti test pa je mediana izračunana za četrtošolke $Me_Ž = 15{,}94$ točke. Primerjava rezultatov pokaže, da so v splošnem računske zmožnosti četrtošolcev višje od računskih zmožnosti četrtošolk.

22. Modus

Kot modus smatramo tisto vrednost znaka, ki se v populaciji najpogosteje pojavlja. Najlaže ga določujemo iz frekvenčne distribucije, ker frekvence direktno pokažejo stopnjo gostitve v razredih. Kot prvi približek modusa vzamemo sredino *modalnega razreda*, to je razreda z največjo frekvenco. Točnejšo vrednost modusa pa dobimo po naslednjem postopku:

a) Poiščemo razred, v katerem je frekvenca največja — modalni razred. Ta razred zaznamujemo z 0.

b) Modus izračunamo po obrazcu

$$Mo = x_0 + \frac{f_0 - f_{-1}}{2f_0 - f_{-1} - f_{+1}}\, i \tag{19}$$

Pri tem pomeni: x_0 = spodnja meja modalnega razreda, f_0 = frekvenca modalnega razreda, f_{-1} = frekvenca razreda, ki je pred, f_{+1} = frekvenca razreda, ki je za modalnim razredom.

Grafično moremo poiskati vrednost modusa, kot je prikazano v primeru 23. Najprej zvežemo A s C in B z D. Projekcija presečišča veznic E je vrednost modusa. Rezultat grafičnega načina se teoretično sklada z rezultatom iz obrazca 19.

Primer 22. Iz frekvenčne distribucije rezultatov testiranja računskih zmožnosti četrtošolcev je treba oceniti modus. V tabeli 14 imamo vpisane samo razrede okrog modalnega razreda.

Tabela 14. Izračunavanje modusa za rezultate testiranja računskih zmožnosti v LR Sloveniji

x	f	
9 do 12	176	
13 do 16	180	
17 do 20	294	0
21 do 24	193	
25 do 28	115	

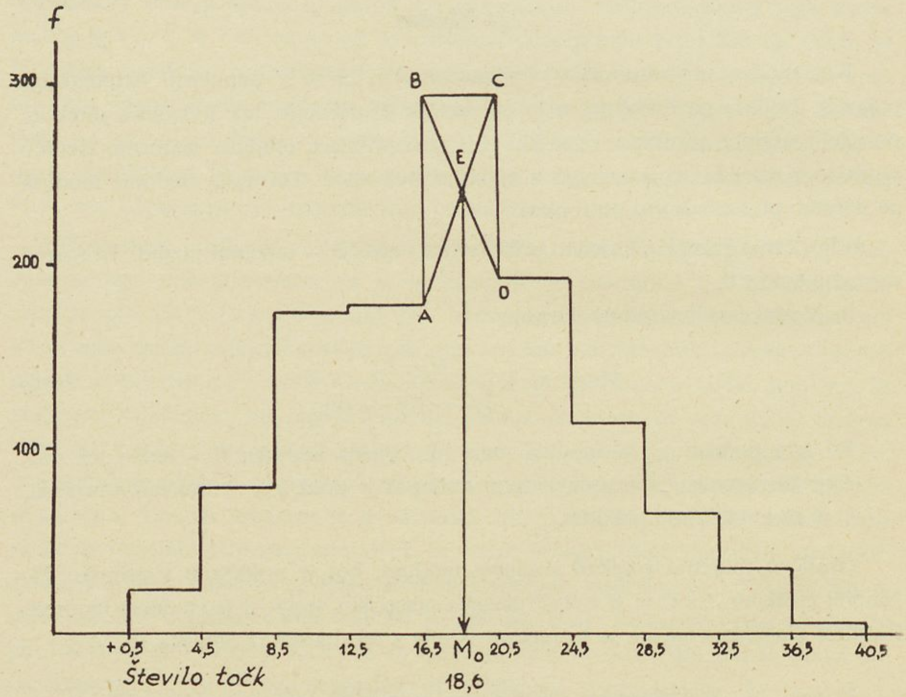
Iz frekvenčne distribucije dobimo, da je

$$x_0 = 16{,}5; \quad f_{-1} = 180; \quad f_0 = 294; \quad f_{+1} = 193; \quad i = 4$$

Iz teh podatkov moremo izračunati s pomočjo obrazca 19 modus.

$$Mo = 16{,}5 + \frac{294 - 180}{2.294 - 180 - 193} 4 = 18{,}62 \text{ točke}$$

Primer 23. Problem iz primera 22 je rešen grafično v sliki 10. Modus, ocenjen grafično, je $Mo = 18{,}6$. V primerjavi z izračunanim rezultatom 18,62 je razlika minimalna.



Slika 10. Grafičen način določanja modusa za rezultate testiranja računskih zmožnosti četrtošolcev v LR Sloveniji

Za unimodalne, ne preveč asimetrične distribucije, moremo oceniti modus tudi z obrazcem

$$Mo = 3\,Me - 2\,M \tag{20}$$

pri čemer pomeni M aritmetično sredino.

Modus je prav tako kot mediana neobčutljiv za spremembe robnih vrednosti oziroma frekvenc. To je njegova hiba, kljub temu da je logičen smisel modusa velik.

Bimodalne in polimodalne distribucije imajo toliko relativnih modusov, kolikor imajo vrhov. Vendar je eden izmed teh absoluten modus zaradi tega, ker je gostitev okrog tega mesta absolutno največja. Če ima frekvenčna distribucija veliko število razredov, frekvence ne kažejo zakonitosti gostitve. Zaradi tega morajo biti razredi primerno veliki, da moremo poiskati modus. V nasprotnem primeru je treba pred izračunavanjem izvesti grupiranje razredov.

23. Aritmetična sredina

Največkrat uporabljamo kot srednjo vrednost aritmetično sredino ali povprečje. Aritmetična sredina je po definiciji kvocient med vsoto vrednosti vseh enot in skupnim številom enot v populaciji. Zaznamujemo jo z M.

23.1 Izračunavanje aritmetične sredine iz individualnih podatkov

Iz individualnih podatkov izračunavamo aritmetično sredino po zgornji definiciji z obrazcem

$$M = \frac{\Sigma x}{N} \tag{21}$$

Pri tem pomeni znak Σ seštevanje.

Primer 24. Iz rezultatov testiranj mehanskih odnosov 20 četrtošolk iz primera 6 dobimo aritmetično sredino po obrazcu 21 na naslednji način:

$$M = \frac{\Sigma x}{N} = \frac{36 + 26 + \ldots + 32 + 23}{20} = \frac{441}{20} = 22{,}05 \text{ točke}$$

23.2 Izračunavanje aritmetične sredine iz frekvenčnih distribucij

Iz frekvenčnih distribucij moremo izračunati dokaj dobro oceno aritmetične sredine. Izračunavanje aritmetične sredine za velike populacije bi bilo namreč zelo zamudno, če bi jo izračunavali iz osnovnih podatkov. Za izračunavanje aritmetične sredine iz frekvenčne distribucije uporabljamo tri metode, ki dajo enake rezultate: a) direktno metodo, b) vpeljavo pomožnega znaka u in c) metodo kumulativ.

23.21 Direktna metoda. Po direktni metodi izračunavamo aritmetično sredino po naslednjih stopnjah:

a) Dano imamo frekvenčno distribucijo znaka f (v kolonah 1 in 2).
b) Poiščemo sredine razredov x in jih vpišemo v kolono 3.
c) Pomnožimo sredino vsakega razreda z ustrezajočo frekvenco in vpišemo produkte fx v kolono 4.
d) Seštejemo frekvence f (kolona 2) in produkte fx (kolona 4). Tako dobimo N in Σfx.
e) Iz teh podatkov izračunamo aritmetično sredino po obrazcu

$$M = \frac{\Sigma fx}{N} \tag{22}$$

Ta način je dosti zamuden zaradi razmeroma kompliciranega množenja frekvenc s sredinami razredov, ki so običajno večmestna števila.

Primer 25. Po direktni metodi je treba izračunati aritmetično sredino iz frekvenčne distribucije rezultatov testiranja računskih zmožnosti četrtošolcev v LRS iz tabele 5.

Tabela 14. Izračunavanje aritmetične sredine za rezultate testiranja računskih zmožnosti četrtošolcev po direktni metodi

(1) Točk	(2) f	(3) x	(4) fx
−3 do 0	1	−1,5	−1,5
1 do 4	24	2,5	60,0
5 do 8	79	6,5	513,5
9 do 12	176	10,5	1848,0
13 do 16	180	14,5	2610,0
17 do 20	294	18,5	5439,0
21 do 24	193	22,5	4324,5
25 do 28	115	26,5	3047,5
29 do 32	64	30,5	1952,0
33 do 36	35	34,5	1207,5
37 do 40	6	38,5	231,0
	$N = 1167$		$\Sigma fx = 21249,5$

Glede na obrazec 22 je

$$M = \frac{21249,5}{1167} = 18,21 \text{ točke}$$

Ker je širina razreda enaka, dobimo sredine razredov s postopnim prištevanjem $i = 4$.

23.22 Vpeljava pomožnega znaka *u*. Z vpeljavo pomožnega znaka *u* izračunamo aritmetično sredino po naslednjih stopnjah:

a) Dano imamo frekvenčno distribucijo (v kolonah 1 in 2).

b) V poljubnem razredu frekvenčne distribucije (najugodneje je v sredini serije oziroma na mestu, kjer je frekvenca največja) postavimo vrednost 0, od te pa v nižje razrede po vrsti —1, —2, —3, ..., v višje razrede pa +1, +2, +3, ... Te vrednosti, ki so vrednosti pomožnega znaka *u*, vpišemo v kolono 3.

c) Pomnožimo frekvence *f* z ustrezajočimi vrednostmi znaka *u* in produkte *fu* vpišemo v kolono 4. Pri tem je treba paziti na predznake.

d) Seštejemo frekvence v koloni 2 in produkte iz kolone 4. Tako dobimo N in Σfu.

e) Aritmetično sredino M izračunamo iz teh podatkov po obrazcu

$$M = x_0 + i \frac{\Sigma fu}{N} \tag{23}$$

Pri tem pomeni: $x_0 =$ sredina razreda, v katerega smo postavili $u = 0$.

Primer 26. Po metodi pomožnega znaka *u* je izračun aritmetične sredine za podatke računskega testa naslednji:

Tabela 15. Izračunavanje aritmetične sredine za rezultate testiranja računskih zmožnosti četrtošolcev po metodi pomožnega znaka *u*

(1) Točk	(2) f	(3) u	(4) fu	
-3 do 0	1	—5	—5	
1 do 4	24	—4	—96	
5 do 8	79	—3	—237	
9 do 12	176	—2	—352	
13 do 16	180	—1	—180	—870
17 do 20	294	0	0	
21 do 24	193	+1	+193	+785
25 do 28	115	+2	+230	
29 do 32	64	+3	+192	
333 do 36	35	+4	+140	
37 do 40	6	+5	+30	
	$N = 1167$		$\Sigma fu = —85$	

$x_0 = 18{,}5$; $i = 4$

Po obrazcu 23 dobimo iz teh količin

$$M = 18{,}5 + 4 \frac{-85}{1167} = 18{,}21 \text{ točke}$$

Iz primera vidimo, da smo postavili $u = 0$ v razred 17 do 20, ki ima največjo frekvenco in je sredi serije. Napravili smo delne seštevke negativnih in pozitivnih vrednosti produktov, kar olajša seštevanje negativnih in pozitivnih vrednosti. Čeprav je po tej metodi še vedno potrebno množiti frekvence z u, je izračunavanje znatno poenostavljeno, ker so vrednosti u enostavnejše vrednosti kot pa originalne vrednosti sredin razredov. Primerjava rezultata z rezultatom, dobljenim po direktni metodi, pokaže enakost.

23.23 Metoda kumulativ. Po metodi kumulativ pa izračunamo aritmetično sredino po stopnjah:

a) Iz frekvenčne distribucije izračunamo kumulativo na način, ki je razviden iz primera 12.

b) Seštejemo člene kumulativne serije razen zadnjega, ki pade pod črto. Tako dobimo A, medtem ko je zadnji člen kumulativne serije N.

c) Iz teh podatkov izračunamo aritmetično sredino po obrazcu

$$M = x_0 - i \frac{A}{N} \tag{24}$$

Pri tem pomeni poleg že znanih podatkov x_0 sredino najvišjega razreda.

Ta metoda je najracionalnejša, ker bazira, razen pri končnem izračunu, na samem seštevanju. Posebno se obnese, ako računamo s seštevalnim strojem z registrirnim trakom, kjer dobimo kumulative avtomatično z uporabo subtotala.

Primer 27. Po metodi kumulativ izračunamo aritmetično sredino za distribucijo rezultatov računskega testa kot kaže tabela 16.

Tabela 16. Izračunavanje aritmetične sredine za rezultate testiranja računskih zmožnosti četrtošolcev po metodi kumulativ

(1) Točk	(2) f	(3) F	
–3 do 0	1	0	
1 do 4	24	1	
1 do 8	79	25	
9 do 12	176	104	
13 do 16	180	280	
17 do 20	294	460	
do 24	193	754	
25 do 28	115	947	
29 do 32	64	1062	
33 do 36	35	1126	
37 do 40	6	1161	$0 + 1 + 25 + \ldots + 1126 + 1161 = 5920 = A$
		$1167 = N$	

$i = 4$; $x_0 = 38{,}5$

Iz dobljenih podatkov je po obrazcu 24

$$M = 38{,}5 - 4\,\frac{5920}{1167} = 18{,}21 \text{ točke}$$

23.3 Aritmetična sredina aritmetičnih sredin in strukturnih odstotkov

Ako imamo dane *aritmetične sredine* M_k za več delnih populacij, moremo izračunati aritmetično sredino celotne populacije M, ako poznamo število enot v posameznih delnih populacijah N_k. Skupno aritmetično sredino M izračunamo kot ponderirano — tehtano aritmetično sredino, pri čemer je število enot v posameznih delnih populacijah ponder. Tehtano aritmetično sredino izračunamo po obrazcu

$$M = \frac{\Sigma N_k M_k}{\Sigma N_k} \tag{25}$$

Primer 28. Povprečno število točk pri testu zmožnosti presojanja mehanskih odnosov je za tretješolce $M_1 = 17{,}3$, za tretješolke pa $M_2 = 15{,}3$. Število testiranih tretješolcev je bilo $N_1 = 1493$, število testiranih tretješolk pa $N_2 = 1999$. Skupna aritmetična sredina je po obrazcu 25

$$M = \frac{N_1 M_1 + N_2 M_2}{N_1 + N_2} = \frac{1493 \cdot 17{,}3 + 1999 \cdot 15{,}3}{1493 + 1999} = 16{,}16 \text{ točke}$$

Strukturni odstotki so po svoji osnovi tudi povprečja. Zaradi tega moremo izračunati iz strukturnih deležev ali odstotkov P_k za več delnih populacij strukturni delež ali odstotek P za skupno populacijo, če poznamo število enot delnih populacij N_k. Obrazec 26 je analogen obrazcu 25.

$$P = \frac{\Sigma N_k P_k}{\Sigma N_k} \tag{26}$$

Primer 29. Iz tabele 11 primera 15 dobimo, da je v skupini onih, ki so bili pri izdelovanju poizkusnih ključev hitri, $P_1 = 10{,}9\,\%$ izdelkov nadpovprečnih, v skupini onih, ki so delali z zmerno hitrostjo $P_2 = 14{,}5\,\%$ nadpovprečnih, v skupini počasnih pa $P_3 = 39{,}5\,\%$ izdelkov nadpovprečnih. Iz tabele 10 dobimo, da je število oseb v posameznih skupinah po hitrosti: hitrih $N_1 = 174$, zmernih $N_2 = 280$, počasnih $N_3 = 39$. Po obrazcu 26 moremo izračunati odstotek nadpovprečnih izdelkov za celotno populacijo

$$P = \frac{174 \cdot 10{,}9 + 280 \cdot 14{,}5 + 39 \cdot 39{,}5}{174 + 280 + 39} = 15{,}3\ \%$$

Ta rezultat ima zelo majhno analitično vrednost, ker so posamezni deli populacije zelo različni in je zaradi tega slab reprezentant skupin.

Opozoriti moramo na napako, ki jo včasih opažamo v praksi, da nekateri izračunavajo skupne aritmetične sredine in strukturne odstotke iz delnih populacij po obrazcu 22, ki velja za izračunavanje aritmetične sredine iz osnovnih podatkov. Po tem napačnem načinu bi bil povprečen odstotek nadpovprečnih izdelkov:

$$P = \frac{10{,}9 + 14{,}5 + 39{,}5}{3} = 21{,}6\ \%$$

Ta rezultat se bistveno razlikuje od prave vrednosti 15,3 % in je napačen.

23.4 Lastnosti aritmetične sredine

Aritmetična sredina ima veliko prednosti pred drugimi vrstami sredin. Predvsem je zelo občutljiva za spremembe vrednosti, ker je — kot je razvidno iz obrazca 21 — odvisna od vrednosti vsake enote. Velika prednost, ki je druge srednje vrednosti nimajo, je tudi ta, da moremo z aritmetično sredino izvajati najrazličnejša preračunavanja. En tak primer je že zgornji način izračunavanja skupne aritmetične sredine. Zaradi tega pri analitičnem proučevanju večinoma uporabljamo aritmetično sredino, mediano in modus pa le za opisovanje populacije.

24. Odnos med M, Me in Mo

Med aritmetično sredino M, mediano Me in modusom Mo obstajajo glede na obliko distribucije določeni odnosi. Za unimodalne, ne preveč asimetrične distribucije, smo že videli, da velja obrazec

$$Mo = 3\,Me - 2\,M \tag{27}$$

V splošnem pa velja:
če je distribucija simetrična, je

$$M = Me = Mo \tag{28}$$

če je distribucija asimetrična v levo, je

$$Mo > Me > M \tag{29}$$

če je distribucija asimetrična v desno, pa je

$$M > Me > Mo \tag{30}$$

3 MERE VARIACIJE

30. Vrste

Vrednosti znaka posameznih enot populacije se zaradi individualnih vplivov odklanjajo od centralne — srednje vrednosti. Variiranje smo že opazovali tako na primerih individualnih podatkov kot na frekvenčnih distribucijah. Čim močnejši so individualni vplivi, tem močnejša je variacija in obratno, čim slabši so individualni vplivi, tem manjša je variacija. S tem da merimo variacijo, merimo torej jakost individualnih vplivov. Mer variacije imamo več: a) *variacijski razmak*, b) *kvartilni odklon*, c) *povprečni absolutni odklon*, d) *varianco* oziroma *standardni odklon.*

31. Variacijski razmak

Variacijski razmak je po definiciji razlika med največjo in najmanjšo vrednostjo v populaciji. Če zaznamujemo variacijski razmak z R, z x_{max} največjo, z x_{min} pa najmanjšo vrednost, ki nastopi v populaciji, moremo nakazati izračunavanje variacijskega razmaka v obliki obrazca

$$R = x_{max} - x_{min} \tag{31}$$

Primer 30. Za 20 testiranj mehanskega presojanja za četrtošolke iz primera 6 dobimo: $x_{min} = 11$; $x_{max} = 41$. Variacijski razmak je torej po obrazcu 31

$$R = 41 - 11 = 30 \text{ točk}$$

Variacijski razmak ima, čeprav je enostaven za določanje, niz pomanjkljivosti, ki omejujejo njegov pomen. Odvisen je namreč samo od dveh vrednosti, ki sta poleg tega še skrajni in zaradi tega nestabilni. Poleg tega se R z večanjem populacije veča, kar ni v skladu z dejstvom, da je variabilnost od velikosti populacije neodvisna.

32. Kvartilni odklon

Solidnejša mera variacije je *kvartilni razmak*, ki je po definiciji razlika med tretjim in prvim kvartilom, torej interval, v katerem je polovica vrednosti populacije.

Vendar običajno namesto njega izračunavamo *kvartilni odklon Q*, ki je polovica kvartilnega razmaka

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2} \tag{32}$$

Ta mera variacije je stabilnejša od variacijskega razmaka, ker ni odvisna samo od ekstremnih vrednosti. Določamo jo tako, da po znanih postopkih izračunamo kvartile in njihove vrednosti vstavimo v obrazec 32.

Opomba: Za mero variacije bi mogel enako rabiti tudi *interdecilni razmak D*, ki je razlika med devetim in prvim decilom

$$D = D_9 - D_1 \tag{33}$$

Interdecilni razmak obsega 80 % vseh vrednosti populacije.

Primer 31. Za rezultate testiranja računskih zmožnosti četrtošolčev smo v primeru 20 dobili: $Q_1 = 12{,}76$; $Q_3 = 23{,}19$.

Iz teh podatkov dobimo, da je kvartilni odklon testa računskih zmožnosti četrtošolcev

$$Q = \frac{23{,}19 - 12{,}76}{2} = 5{,}22 \text{ točke}$$

Interdecilni razmak pa je enak

$$D = 28{,}09 - 8{,}79 = 19{,}30 \text{ točke}$$

ker je iz istega primera 20 razvidno, da je $D_1 = 8{,}79$, $D_9 = 28{,}09$.

33. Povprečni absolutni odklon

Odklon posamezne vrednosti od sredine *e*

$$e = x - M \tag{34}$$

je rezultat individualnih vplivov na enoto. Sumaren parameter velikosti vseh odklonov bi bila aritmetična sredina vseh odklonov.

Odkloni so pozitivni in negativni, njih vsota pa je enaka 0. Zaradi tega vzamemo za merilo variacije *povprečni absolutni odklon*, ki ga izračunamo po naslednjih stopnjah:

a) Izračunamo aritmetično sredino M ali mediano Me.

b) Izračunamo absolutne odklone individualnih vrednosti od srednje vrednosti M ali Me in dobimo $|x - M|$ ali $|x - Me|$.

c) Absolutne odklone seštejemo in delimo s številom enot

$$AD_M = \frac{1}{N} \sum |x - M|; \quad AD_{Me} = \frac{1}{N} \sum |x - Me| \tag{35}$$

Če so vrednosti dane v frekvenčni distribuciji, je treba izračunati tehtani povprečni absolutni odklon po obrazcih

$$AD_M = \frac{1}{N} \sum f |x - M|; \quad AD_{Me} = \frac{1}{N} \sum f |x - Me| \tag{36}$$

Odklone moremo računati od aritmetične sredine M ali mediane Me. Odkloni od mediane so v tem primeru vsebinsko primernejši.

Primer 32. Za dvajset testiranj presojanja mehanskih zmožnosti iz primera 6 moramo izračunati povprečen absoluten odklon od mediane AD_{Me}. V primeru 18 smo našli, da je mediana teh podatkov $Me = 20$.

Tabela 17. Izračunavanje povprečnega absolutnega odklona od mediane AD_{Me} za 20 podatkov testiranja mehanskega presojanja iz primera 6

x	33	26	13	11	19	16	29	21	41	12	28	30	14	15	18	13	34	13	32	23
$\|x - Me\|$ ...	13	6	7	9	1	4	9	1	21	8	8	10	6	5	2	7	14	7	12	3

$$\Sigma |x - Me| = 13 + 6 + \ldots + 12 + 3 = 153 \quad N = 20$$

Po obrazcu 35 je $AD_{Me} = \frac{153}{20} = 7{,}65$ točke

34. Varianca, standardni odklon

Najvažnejša mera variacije je *varianca* oziroma iz nje izpeljan *standardni odklon.* Varianca in standardni odklon imata velike teoretične in praktične prednosti pred drugimi merami variacije zaradi zveze z normalno distribucijo, verjetnostnim računom, metodo najmanjših kvadratov in tako dalje. Zaradi tega so druge mere bolj opisnega, varianca pa je analitičnega značaja.

Varianca je po definiciji povprečen kvadratičen odklon od aritmetične sredine. To definicijo moremo pisati v obliki obrazca

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum (x - M)^2 \tag{37}$$

Standardni odklon σ pa je kvadratni koren iz variance. Včasih zaznamujemo standardni odklon tudi s SD, tako da velja obrazec

$$SD = \sigma = \sqrt{\sigma^2} \tag{38}$$

34.1 **Izračunavanje variance iz individualnih podatkov**

34.11 Glede na zgornji obrazec izračunavamo varianco iz individualnih podatkov na direktni način:

a) izračunamo aritmetično sredino,

b) izračunamo odklone posameznih vrednosti od aritmetične sredine,

c) odklone kvadriramo,

d) kvadrate odklonov seštejemo,

e) vsoto kvadratov delimo z N.

34.12 Direktni način je običajno nepraktičen in moremo varianco izračunati enostavnejše z vpeljavo pomožnega znaka u. Po tej metodi izračunamo varianco po naslednjih stopnjah:

a) izberemo neko poljubno okroglo vrednost x_0, ki leži med stvarnimi vrednostmi,

b) izračunamo odklone posameznih vrednosti od x_0. Tako dobimo vrednosti $u = x - x_0$,

c) količine u kvadriramo,

d) seštejemo vse vrednosti u, da dobimo $\Sigma u = U$, in vse u^2, da dobimo Σu^2,

e) iz teh količin izračunamo varianco po obrazcu

$$\sigma_x^2 = \frac{\Sigma u^2 - \frac{U^2}{N}}{N} = \frac{K}{N} \tag{39}$$

Opomba: Kadar se ne moremo odločiti za nobeno vrednost x_0, ki bi zmanjšala podatke, vzamemo $x_0 = 0$. V tem primeru rabijo osnovne vrednosti direktno kot količine, katere seštevamo in kvadriramo, varianco pa računamo po obrazcu

$$\sigma_x^2 = \frac{\Sigma x^2 - \frac{X^2}{N}}{N} = \frac{K}{N} \tag{40}$$

Primer 33. Za dvajset testiranj z mehanskim testom iz primera 6 je izračun variance naslednji:

Tabela 18. Izračunavanje variance iz individualnih podatkov po metodi pomožnega znaka u za 20 podatkov testiranja z mehanskim testom iz primera 6

x	u	u^2
33	+13	169
26	+6	36
13	—7	49
11	—9	81
19	—1	1
16	—4	16
29	+9	81
21	+1	1
41	+21	441
12	—8	64
28	+8	64
30	+10	100
14	—6	36
15	—5	25
18	—2	4
13	—7	49
34	+14	196
13	—7	49
32	+12	144
23	+3	9
$N = 20$	$U = +41$	$1615 = \Sigma u^2$

Kot x_0 smo vzeli $x_0 = 20$.

Po obrazcu 39 moremo izračunati varianco iz podatkov, dobljenih v tabeli 18.

$$\sigma_x^2 = \frac{1615 - \frac{41^2}{20}}{20} = 78{,}55$$

standardni odklon pa je

$$\sigma_x = \sqrt{78{,}55} = 8{,}86 \text{ točke}$$

34.2 **Izračunavanje variance iz frekvenčnih distribucij**

Oceno variance moremo dobiti iz frekvenčne distribucije na več načinov: a) na direkten način, b) z vpeljavo pomožnega znaka u, c) s kumulativnimi serijami.

34.21 Na direkten način po obrazcu 41 običajno variance ne računamo, ker je prezamudno v primerjavi z ostalima dvema metodama.

$$\sigma^2 = \frac{K}{N}; \quad K = \Sigma f(x - M)^2 \tag{41}$$

34.22 S pomožnim znakom u izračunamo varianco takole:

a) V poljuben razred (najbolje sredi distribucije) postavimo vrednost znaka $u = 0$, v razrede, ki so nižji od razreda 0, vrednosti —1, —2, —3, ..., v razrede, ki so višji od razreda 0, pa +1, +2, +3, ... To so vrednosti pomožnega znaka u, ki jih vpišemo v kolono 3 poleg frekvenc.

b) V kolono 4 vpišemo produkte frekvenc in znaka u. Tako dobimo fu.

c) Produkte fu ponovno pomnožimo z u. Tako dobimo fu^2 in te vrednosti vpišemo v naslednjo kolono 5.

d) Seštejemo f, fu in fu^2 v kolonah 3, 4 in 5. Tako dobimo N, $\Sigma fu = U$, Σfu^2.

e) Iz teh količin izračunamo varianco po obrazcu

$$\sigma^2 = \frac{i^2}{N} K; \quad K = \Sigma fu^2 - \frac{U^2}{N} \tag{42}$$

f) Iz variance izračunamo standardni odklon po obrazcu

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} \tag{43}$$

Primer 34. Iz frekvenčne distribucije za rezultate testiranja mehanskih odnosov četrtošolk gimnazij z enim četrtim oddelkom v LRS je treba po metodi pomožnega znaka u izračunati σ_x^2 in σ_x.

Tabela 19. Izračunavanje variance mehanskega testa s pomočjo pomožnega znaka *u*

(1) x	(2) f	(3) u	(4) fu	(5) fu^2
—9 do 5	1	—6	—6	36
—4 do 0	5	—5	—25	125
1 do 5	11	—4	—44	176
6 do 10	21	—3	—63	189
11 do 15	45	—2	—90	180
16 do 20	61	—1	—61	61
21 do 25	72	0	0	0
26 do 30	52	+1	+52	52
31 do 35	38	+2	+76	152
36 do 40	26	+3	+78	234
41 do 45	7	+4	+28	112
46 do 50	3	+5	+15	75
	$N = 342$		$U = -40$	$1392 = \Sigma fu^2$

Kot izhodišče smo vzeli razred 21 do 25. Razredni interval $i = 5$.
Po obrazcu 42 in podatkih, dobljenih v tabeli 19, je

$$K = 1392 - \frac{(-40)^2}{342} = 1387{,}32$$

$$\sigma_x^2 = \frac{5^2}{342} 1387{,}32 = 101{,}5$$

$$\sigma_x = \sqrt{101{,}5} = 10{,}08 \text{ točke}$$

34.23 Po metodi kumulativ pa je izračunavanje variance naslednje:

a) Iz frekvenčne distribucije f na znan način izračunamo prvo kumulativo F. Zadnji člen pod črto je N.

b) Iz dobljene prve kumulative F po enakem principu izračunamo drugo kumulativo FF. Zadnji člen — pod črto — je A.

c) Seštejemo člene druge kumulative brez zadnjega člena A pod črto. To vsoto zaznamujmo z B.

d) Iz teh količin izračunamo varianco po obrazcu

$$\sigma^2 = \frac{i^2}{N} K; \quad K = 2B + A - \frac{A^2}{N} \tag{44}$$

Metoda kumulativ je posebno prikladna iz dveh razlogov. Po tej metodi je množenje reducirano na minimum, postranski rezultat pa je kumulativna serija, ki je za analizo distribucij važna, posebno če moramo poleg variance izračunati še določene kvantile.

Primer 35. Za distribucijo iz primera 34 je treba izračunati varianco in standardni odklon po metodi kumulativ.

Tabela 20. Izračunavanje variance rezultatov mehanskega testa po metodi kumulativ

x	f	F	FF	
—9 do —5	1	0	0	
—4 do 0	5	1	0	
1 do 5	11	6	1	
6 do 10	21	17	7	
11 do 15	45	38	24	
16 do 20	61	83	62	
21 do 25	72	144	145	
26 do 30	52	216	289	
31 do 35	38	268	505	
36 do 40	26	306	773	
41 do 45	7	332	1079	
46 do 50	3	339	1411	$1 + 7 + \ldots + 1079 + 1411 = 4296 = B$
		$N = 342$	$1750 = A$	

Druga kumulativa FF je tvorjena: $1 + 0 = 1$; $6 + 1 = 7$; $17 + 7 = 24$ itd. Iz dobljenih količin sledi po obrazcu 44

$$K = 2 \cdot 4296 + 1750 - \frac{1750^2}{342} = 1387{,}32$$

$$\sigma_x^2 = \frac{5^2}{342} 1387{,}32 = 101{,}5$$

$$\sigma_x = \sqrt{101{,}5} = 10{,}08 \text{ točke}$$

34.3 Sheppardova korektura

Zgornje ocene variance so računane pod predpostavko, da so vrednosti v posameznih razredih enake sredini razreda. To seveda ne ustreza dejanskemu stanju in je vir sistematične napake pri ocenjevanju variance. Za zvezne znake, katerih distribucija je unimodalna in zvonasta, korigiramo napako, ki izvira iz grupiranja podatkov, po obrazcu

$$\sigma_{x,cor}^2 = \sigma_x^2 - \frac{i^2}{12} \tag{45}$$

Pri tem pomeni $\sigma_{x,cor}^2$ korigirano varianco, σ_x^2 varianco, izračunano po zgornjih postopkih, i pa razredni interval. To je Sheppardova korektura.

Primer 36. Za varianco rezultatov mehanskega testiranja iz primera 35 je Sheppardova korektura variance po obrazcu 45

$$\sigma_{x,cor}^2 = 101{,}5 - \frac{5^2}{12} = 99{,}4; \quad \sigma_{x,cor} = 9{,}97$$

Vidimo, da je korigirana varianca za malenkost manjša od nekorigirane.

34.4 Varianca iz delnih populacij

Če imamo za delne populacije znano število enot N_k, aritmetične sredine M_k in variance σ_k^2, moremo izračunati varianco celotne populacije iz delnih po obrazcu

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum N_k \sigma_k^2 + \frac{1}{N} \sum N_k (M_k - M)^2 = M_{\sigma^2} + \sigma_M^2 \tag{46}$$

Skupna varianca je torej vsota povprečja varianc v delnih populacijah M_{σ^2} in variance delnih aritmetičnih sredin σ_M^2. Ta obrazec je zelo važen ne samo zaradi tega, ker omogoča izračunavanje skupne variance iz podatkov delnih populacij, ampak predvsem zaradi tega, ker omogoča razstavljanje variance v njene sestavne dele in s tem analizo variance po faktorjih.

Primer 37. Za mehanski test tretješolcev in tretješolk smo pri masovnem testiranju dobili naslednje rezultate:

Tretješolci: $N_1 = 1567$; $M_1 = 33{,}1$; $\sigma_1^2 = 121{,}0$

Tretješolke: $N_2 = 2057$; $M_2 = 19{,}8$; $\sigma_2^2 = 81{,}0$

$$M_{\sigma^2} = \frac{N_1\sigma_1^2 + N_2\sigma_2^2}{N_1 + N_2} = \frac{1567 \cdot 121{,}0 + 2057 \cdot 81{,}0}{1567 + 2057} = 98{,}4$$

$$\sigma_M^2 = \frac{N_1(M_1 - M)^2 + N_2(M_2 - M)^2}{N_1 + N_2} =$$

$$= \frac{1567\,(33{,}1 - 25{,}5)^2 + 2057\,(19{,}8 - 25{,}5)^2}{1567 + 2057} = 43{,}4$$

$$\text{ker je } M = \frac{1}{N} \sum N_k M_k = \frac{N_1M_1 + N_2M_2}{N_1 + N_2} = \frac{1567 \cdot 33{,}1 + 2057 \cdot 19{,}8}{1567 + 2057} = 25{,}5$$

Od skupne variance rezultatov mehanskega testiranja $\sigma^2 = M_{\sigma^2} + \sigma_M^2 = 98{,}4 + 43{,}4 = 141{,}8$ je 43,4 ali 30,6 % variance na račun spola, 98,4 ali 69,4 % pa na račun drugih, individualnih faktorjev. Večji odstotek variance, ki bi izviral iz spola, bi kazal na to, da je zmožnost mehanskega presojanja bolj, manjši odstotek pa, da je zmožnost mehanskega presojanja manj odvisna od spola. V primeru neodvisnosti od spola bi bile grupne sredine enake; $\sigma_M^2 = 0$, v primeru, da bi bila zmožnost presojanja mehanskih odnosov odvisna samo od spola, pa bi bila $M_{\sigma^2} = 0$. Vsa varianca bi v tem primeru izvirala iz odvisnosti od spola.

Čeprav je izračunavanje variance in standardnega odklona razmeroma komplicirano, je njihov praktični, predvsem pa teoretični pomen tako velik, da ju uporabljamo v večini primerov kot mero variacije.

34.5 Koeficient variacije

Varianca in standardni odklon sta primerljiva samo za sorodne populacije. Zaradi tega izračunavamo včasih *koeficient variacije KV*, ki je po definiciji odstotno razmerje med standardnim odklonom in aritmetično sredino in ga izračunavamo po obrazcu

$$KV = 100\,\frac{\sigma}{M} \tag{47}$$

Koeficient variacije KV omogoča primerljivost variabilnosti za različne populacije. Vendar moramo opozoriti, da je izračunavanje koeficienta variacije brez smisla, če je izhodišče merjenja arbitrarno, kar je pogosto primer pri psiholoških meritvah.

Primer 38. Za mehanski test tretješolcev in tretješolk v LRS imamo naslednje podatke: tretješolci: $M_1 = 33{,}1$, $\sigma_1 = 11{,}0$; tretješolke: $M_2 = 19{,}8$, $\sigma_2 = 9{,}0$. Primerjava standardnih odklonov pokaže, da je variabilnost za dečke večja kot za deklice. Če izračunamo po obrazcu 47 koeficiente variacije, pa dobimo:

$$KV_1 = 100\,\frac{11{,}0}{33{,}1} = 33\,\% \qquad KV_2 = 100\,\frac{9{,}0}{19{,}8} = 45\,\%$$

Relativno merilo variacije torej kaže večjo variabilnost rezultatov deklic. Razmerje učinka individualnih vplivov in splošnih vplivov je za deklice večje kot za dečke.

4 MERE ASIMETRIJE IN SPLOŠČENOSTI

40. Splošno

Populacija ni popolnoma opisana s sredino in mero variacije, temveč kaže pri isti srednji vrednosti in isti meri variacije različne lastnosti: večjo ali manjšo stopnjo asimetričnosti in večjo ali manjšo stopnjo sploščenosti. Več o teh lastnostih smo povedali že pri frekvenčnih distribucijah v odstavku 11.32. Asimetrijo in sploščenost merimo z beta koeficienti, katerih izračunavanje je precej zamudno. Imamo pa tudi enostavnejše mere, ki opisujejo ti dve lastnosti populacij.

41. Mere asimetrije

Enostavne mere asimetrije, ki jih moremo izračunati iz srednjih vrednosti, mer variacije in kvantilov, izračunavamo po obrazcih:

$$As_a = \frac{Q_3 + Q_1 - 2Me}{Q_3 - Q_1} \tag{48}$$

$$As_b = \frac{D_9 + D_1}{2} - Me \tag{49}$$

$$As_c = \frac{3(M - Me)}{\sigma} \tag{50}$$

	asimetrična v levo:	$As < 0$
Če je distribucija:	simetrična	$As = 0$
	asimetrična v desno:	$As > 0$

Primer 39. Iz primera 19 vemo, da je za rezultate testiranja računskih zmožnosti četrtošolcev: $Me = 18{,}18$; $Q_1 = 12{,}76$; $Q_3 = 23{,}19$; $D_1 = 8{,}79$; $D_9 = 28{,}09$, aritmetična sredina $M = 18{,}21$; $\sigma = 7{,}3$. Po obrazcih 48, 49 in 50 izračunamo iz teh podatkov lahko vse tri mere asimetrije:

$$As_a = \frac{23{,}19 + 12{,}76 - 2 \cdot 18{,}18}{23{,}19 - 12{,}76} = -0{,}039$$

$$As_b = \frac{28{,}09 + 8{,}79}{2} - 18{,}18 = -0{,}26$$

$$As_c = \frac{3(18{,}21 - 18{,}18)}{7{,}3} = +0{,}012$$

Vse tri mere asimetrije za isto distribucijo so med seboj različne, ker so računane različno. Zaradi tega moremo primerjati za različne pojave le istovrstne koeficiente. V našem primeru so koeficienti asimetrije zelo blizu 0. Iz tega razloga je razumljivo tudi, da je zadnji koeficient pozitiven, prva dva pa negativna. To nesoglasje izvira iz slučajnih vplivov.

42. Mera sploščenosti

Kot eno izmed mer sploščenosti bomo navedli koeficient, ki ga izračunavamo iz kvartilov in decilov po obrazcu

$$Spl = \frac{Q_3 - Q_1}{2(D_9 - D_1)} \tag{51}$$

Koeficient sploščenosti je za distribucije, ki so:

koničaste	$Spl > 0{,}263$
normalne	$Spl = 0{,}263$
sploščene	$Spl < 0{,}263$

Primer 40. Za test računskih zmožnosti četrtošolcev je $Q_1 = 12{,}76$, $Q_3 = 23{,}19$; $D_1 = 8{,}79$; $D_9 = 28{,}09$. Po obrazcu 51 je koeficient sploščenosti distribucije.

$$Spl = \frac{23{,}19 - 12{,}76}{2(28{,}09 - 8{,}79)} = 0{,}270$$

Distribucija se izkaže glede na sploščenost kot zelo normalna.

5 NORMALNA DISTRIBUCIJA

50. Pojem

Faktorje, ki vplivajo na določen pojav, čigar kvantitativen izraz je statistični znak, delimo na *bistvene* in *slučajne*. Bistveni faktorji, ki vplivajo na doseženo število točk pri testu, ki je izraz določene zmožnosti, so na primer starost, spol, šolska izobrazba, kraj bivanja in tako dalje. Slučajni faktorji pa so drobni vzroki, ki jih v posameznem primeru niti ne moremo določiti, povzroče pa, da različni učenci dosežejo različno število točk, kljub temu da so enako stari, istega spola, imajo isto šolsko izobrazbo, so iz istega kraja in tako dalje, skratka se ujemajo v vseh bistvenih faktorjih.

Čeprav so za določeno populacijo vsi bistveni faktorji stalni, rezultati zaradi slučajnih faktorjev kljub temu variirajo. Frekvenčne distribucije takih populacij navadno kažejo tipično simetrično zvonasto obliko, ki se v primeru, da se populacija veča, vse bolj približuje distribuciji, ki je znana pod imenom *normalna distribucija*. V vseh primerih delovanja samo slučajnih faktorjev ne dobimo normalne distribucije. Vendar je zaradi pogostosti pojavljanja in zaradi teoretičnih prednosti normalna distribucija osnovna teoretična distribucija in bazira na njej velik del statistične teorije in prakse. Posebno važna je normalna distribucija v psihološki statistiki, ker predstavlja osnovo za marsikatero hipotezo, ki omogoča meritve na prvi pogled neizmerljivih pojavov. Zaradi tega izjemnega pomena jo bomo v tem odstavku posebej obravnavali.

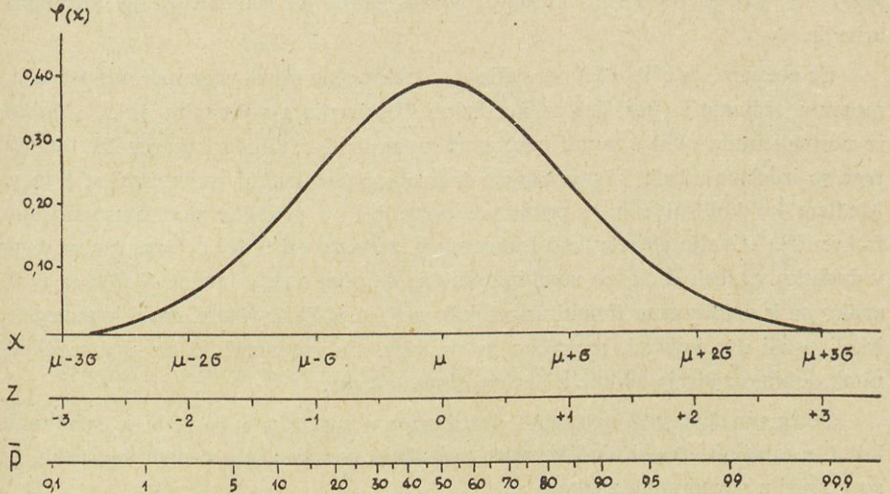
51. Normalna distribucija

V funkcijski obliki je normalna distribucija izražena v obrazcu

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-M)^2}{2\sigma^2}} \tag{52}$$

V tem obrazcu je *gostota relativne frekvence* normalne distribucije $\varphi(x)$ funkcija znaka x. π in e sta konstanti: $\pi = 3{,}1416$; $e = 2{,}7183$. M je aritmetična sredina, σ pa standardni odklon. Grafični prikaz normalne distribucije je dan v sliki 11.

Iz obrazca 52 vidimo, da je normalna distribucija odvisna od dveh parametrov: M in σ. Medtem ko aritmetična sredina M določa mesto, kjer normalna distribucija leži in je rezultat bistvenih vplivov, standardni odklon σ kot mera variacije in izraz individualnih — slučajnih vplivov določa, ali leži distribucija na širšem ali ožjem razmaku. (Glej sliko 13 a, v kateri je: $M_A = M_B < M_C$; $\sigma_A = \sigma_C > \sigma_B$!)



Slika 11. Normalna distribucija: $\varphi(x)$ = gostota relativne frekvence, x = originalni znak; z = normiran — standardiziran odklon; $\bar{P}$ = relativna frekvenca v intervalu $-\infty$ do x.

52. Standardizirana normalna distribucija

Ako proučimo lastnosti normalne distribucije, ugotovimo, da je za vsako normalno distribucijo, torej ne glede na to, kakšna sta M in σ pri istem koeficientu z, vedno isti del relativne frekvence $P(z)$ nad, oziroma $\bar{P}(z)$ pod vrednostjo $x = M + z\sigma$. Relativna frekvenca $P(z)$, ki je v sliki normalne krivulje ponazorjena z ustrezno površino (glej sliko 12e!), je odvisna samo od z. z je odklon vrednosti x od aritmetične sredine M, merjen v standardnih odklonih σ, ne pa v originalni enoti mere. z imenujemo *normiran* ali *standardiziran odklon*. Iz originalne vrednosti x ga dobimo z zvezo v obrazcu

$$z = \frac{x - M}{\sigma} \tag{53}$$

Normiran odklon je važno in univerzalno merilo, ki se v psihološki statistiki zelo pogosto uporablja. Ker je za normiran odklon z $M_z = 0$, $\sigma_z = 1$, je gostota relativne frekvence normiranega ali standardiziranega odklona z taka, kot kaže obrazec 54

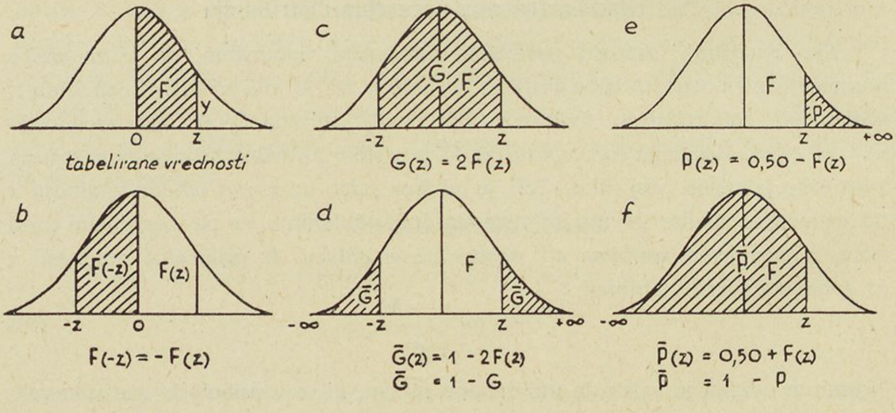
$$y = \varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \tag{54}$$

Ta obrazec je dobljen iz splošnega obrazca 52 za gostoto relativne frekvence. Gostoto relativne frekvence standardizirane normalne distribucije običajno zaznamujemo z y, ker je y grafično ordinata normalizirane ali standardizirane normalne krivulje.

Če poznamo $y(z)$ in $P(z)$ normalizirane frekvenčne distribucije oziroma krivulje, moremo ordinate in površine za normalno distribucijo s poljubnim M in σ dobiti iz normalizirane oblike zaradi enostavne zveze med x in z v obrazcu 53. Zaradi tega so izdelane tabele, ki posredujejo zveze med pozitivnimi vrednostmi z, F in y. Medtem ko količini z in y poznamo, pomeni $F(z)$ površino pod normalizirano frekvenčno krivuljo ali relativno frekvenco v intervalu od 0 do z. Te tabele so dane v dodatku v tabeli B. Iz teh tabel moremo za določen z najti vrednosti $F(z)$ in $y(z)$, enako pa k določenemu F najti ustrezajoče $z(F)$ in $y(F)$. Problem, da bi iz danega y iskali ostali dve količini, praktično ne nastopa. Za vrednosti, ki so med tabeliranimi, dobimo zgornje odnose z linearno interpolacijo.

Poleg površine pod normalno distribucijo v intervalu 0 do z, ki je tabelirana kot F v tabeli B, se običajno v praksi pojavljajo površine še v drugih intervalih, ki so v zvezi z normiranim znakom z.

V sliki 12 so grafični prikazi teh intervalov in njihova zveza s tabelirano površino F.



Slika 12. Različne površine pod standardizirano normalno distribucijo in njih zveza s tabelirano površino F.

V tabeli 21 so prikazane najznačilnejše vrednosti površin in ustrezajočih normiranih vrednosti z.

Tabela 21. Različne vrste površin in njih standardizirani odkloni z za nekaj najznačilnejših vrednosti

	V odstotkih				
z	F	G	$\bar{G}$	P	$\bar{P}$
0,6745	25,00	50,00	50,00	25,00	75,00
1,000	34,13	68,26	31,74	15,87	84,13
1,645	45,00	90,00	10,00	5,00	95,00
1,960	47,50	95,00	5,00	2,50	97,50
2,000	47,73	95,46	4,54	2,27	97,73
2,326	49,00	98,00	2,00	1,00	99,00
2,576	49,50	99,00	1,00	0,50	99,50
3,000	49,87	99,74	0,26	0,13	99,87
3,090	49,90	99,80	0,20	0,10	99,90
3,291	49,95	99,90	0,10	0,05	99,95

Primer 41. Kolike so $z = +1{,}86$ ustrezajoče vrednosti: y, F, P, $\bar{P}$, G, $\bar{G}$ za normalno distribucijo.

V tablicah za standardizirano normalno distribucijo najdemo pri $z = +1{,}86$, $y = 0{,}0707$ in $F = 0{,}4686$. Iz tega dobimo, če uporabimo zveze iz slike 12:

$$G = 2F = 2 \cdot 0{,}4686 = 0{,}9372; \qquad \bar{G} = 1 - G = 1 - 0{,}9372 = 0{,}0628$$
$$P = 0{,}50 - F = 0{,}50 - 0{,}4686 = 0{,}0314; \quad \bar{P} = 0{,}50 + F = 0{,}5 + 0{,}4686 = 0{,}9686$$

Primer 42. Poiskati je treba k $\bar{P} = 0{,}3870$ ustrezajočo vrednost z in y. Ker $\bar{P}$ nimamo tabeliranega, moramo iz $\bar{P}$ najprej poiskati ustrezajočo vrednost F. Ker je $\bar{P} = 0{,}5 + F$ dobimo, da je $F = \bar{P} - 0{,}5 = 0{,}387 - 0{,}5 = -0{,}1130$. Iz tega rezultata vidimo, da je iskani z negativen, njegovo absolutno vrednost pa bomo dobili, če v tablici za normalno distribucijo poiščemo $F = 0{,}1130$ ustrezajoči vrednosti z in y. V tabeli B vidimo, da vrednosti $10\,000F = 1130$ nimamo tabelirane, ugotoviti pa moremo, da pade ta vrednost med 1103 in 1141. Vrednosti z in y bomo dobili torej z linearno interpolacijo. Če prepišemo ti sosedni vrsti iz tabele normalne distribucije, dobimo:

	$10^2 z$	$10^4 F$	$10^4 y$
	28	1103	3836
	29	1141	3826
Δ	$+1$	$+38$	-10

$$F = 1130$$
$$dF = F - F_0 = 1130 - 1103 = +27$$
$$\Delta F = F_1 - F_0 = 1141 - 1103 = +38$$

$$c = \frac{dF}{\Delta F} = \frac{+27}{+38} = 0{,}71$$

$$z = z_0 + \Delta z \cdot c = 28 + 1 \cdot 0{,}71 = 28{,}71; \text{ a merjen pravilno je } z = 0{,}2871$$
$$y = y_0 + \Delta y \cdot c = 3836 + (-10) \cdot 0{,}71 = 3829; \text{ ali merjen pravilno: } y = 0{,}3829$$

Končna korektura je potrebna, ker so tabelirane vrednosti $10^2 z$, $10^4 F$ in $10^4 y$.

53. *z*-rezultat kot pokazatelj mesta v populaciji

Navajanje absolutnih rezultatov posameznih enot nima posebnega pomena. dokler ne vemo, v kakšnem odnosu je ta rezultat do populacije. Kot dopolnilno informacijo smo uvedli kvantilne oziroma v konkretnem centilne range, ki dobro pokažejo mesto določene enote v odnosu na druge vrednosti. Kvantili oziroma centili pa imajo to slabo lastnost, da enaka razlika centilnih rangov na različnih mestih ne pomeni enake razlike med centili. Centilni rangi so po svojem bistvu lahko razumljivi in predstavljivi. Vendar so z-rezultati, to je rezultati, merjeni v standardiziranih odklonih, za normalne distribucije veliko boljše merilo, ker združujejo v sebi dvoje lastnosti: a) zaradi evidentne zveze z z normalno distribucijo in površinami pod njo z-rezultat nakaže mesto enote v populaciji, kar iz osnovne vrednosti x ni razvidno;

b) z-rezultati so z obrazcem $x = M + z\sigma$ v linearni zvezi z osnovnim podatkom x. To ima za posledico, da enake spremembe z-rezultatov pomenijo enake spremembe znaka x na katerem koli delu skale. Te lastnosti centilni rangi nimajo, kar pokaže tabela 22.

Tabela 22. Centilni rangi, *z*-rezultati in njih prve diference

Centilni rang		*z*-rezultat	
CR	ΔCR	z	Δz
1		—2,326	
	+1		+0,272
2		—2.054	
	+1		+0,173
3		—1,881	
	...		
25		—0,675	
	+1		+0,032
26		—0,643	
	+1		+0,030
27		—0,613	
	...		
49		—0,025	
	+1		+0,025
50		0,000	
	+1		+0,025
51		+0,025	

Iz tabele 22 vidimo, da so pri istih diferencah centilnih rangov ($+1$) razlike med z-rezultati tudi desetkratne. Oseba, ki je dosegla drugi centil, je, kot vidimo iz tabele 22, za $+0{,}272z$ boljša kot oseba, ki je dosegla prvi centil. Oseba, ki je dosegla petdeseti centil, pa je samo za $0{,}025z$ boljša od osebe, ki je dosegla devetinštirideseti centil. Razlika je torej enajstkratna. Primerjava centilnih rangov pa vzbudi napačno sliko enakih razlik.

54. Kumulativa normalne distribucije

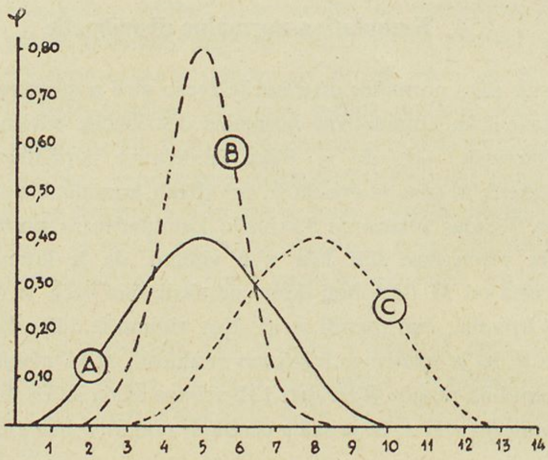
Kot prikazuje slika normalne distribucije zvezo med gostoto relativne frekvence $\varphi(x)$ od x, pokaže slika kumulativne normalne distribucije odvisnost relativne frekvence $\bar{P}$ na intervalu $-\infty$ do x. Slika kumulative normalne distribucije ima tipično obliko črke S, ki smo jo opazili že pri slikah kumulativ unimodalnih distribucij na splošno. Vendar smatramo S krivuljo kumulative za normalno distribucijo kot idealno. Iz primerjave slik 13a z b vidimo, da je kumulativa normalne distribucije odvisna od M (tem bolj desno na skali, čim večji je M), in od σ (tem bolj strma je S krivulja, čim manjši je σ). Kot vidimo iz 13b, daje slika direktno zvezo med x in $\bar{P}$, to je relativno frekvenco vrednosti, ki so manjše od x. Na sliki je poleg skale centilnih rangov $\bar{P}$ na sliki 13b vrisana skala z. Ta skala pokaže, kako so popačene vrednosti z in x, če je skala centilnih rangov $\bar{P}$ linearna.

55. Verjetnostni papir

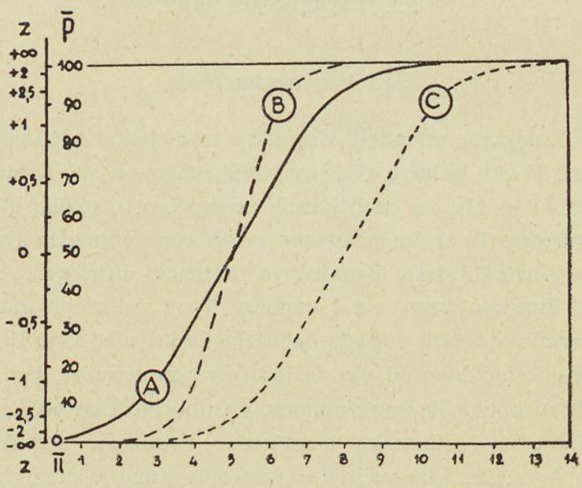
55.1 Verjetnostne skale

Skalo z in $\bar{P}$ moremo preurediti v skladu z medsebojno odvisnostjo tako, da je z-skala linearna. V tem primeru skala centilnih rangov ni več linearna, temveč je, kot kažeta sliki 11 in 13c, na obeh koncih raztegnjena, v sredini okrog centilnega ranga 50 pa stisnjena. To skalo imenujemo zaradi zveze normalne distribucije z verjetnostjo — *verjetnostno skalo*. Kumulativa normalne distribucije, risana na taki skali, je zaradi linearne zveze x z z premica. To je velika prednost verjetnostne skale, ker je premica v nekem pogledu najidealnejša krivulja, ki jo je najlaže narisati in najlaže ugotoviti odklone od nje. Iz lege premice moremo, kot je razvidno iz slike 13c, razbrati obliko in lego normalne distribucije. Čim večji je M, tem bolj je premica, ki predstavlja kumulativo normalne distribucije, pomaknjena v desno (glej slika 13c A in C!). Čim večji je σ, tem bolj strma je premica, ki ponazarja kumulativo normalne distribucije (glej sliko 13c A in B!).

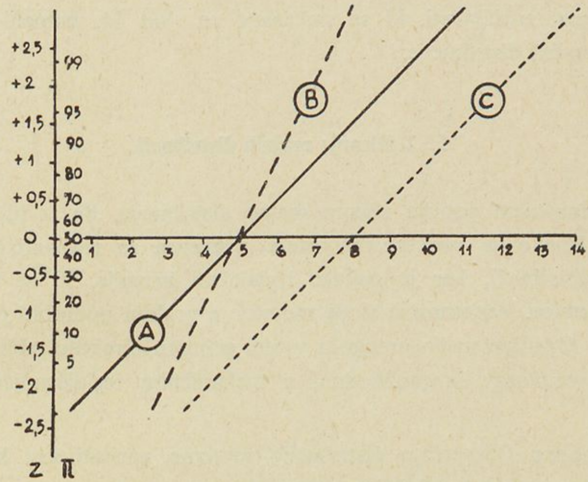
Verjetnostna skala, oziroma papir, kot pravimo mreži, v kateri je ena skala linearna (x), druga pa verjetnostna ($\bar{P}$), je zaradi svojih lastnosti velike praktične vrednosti. Na njej moremo risati ne samo normalne distribucije temveč kumulative najrazličnejših distribucij. Jasno je, da bo slika kumulative na verjetnostnem papirju premica le tedaj, če je distribucija normalna. V tem je pa ravno prednost verjetnostne skale, ker moremo na razmeroma lahek način ugotoviti tip in stopnjo odklonov od



Slika 13a. Normalne distribucije

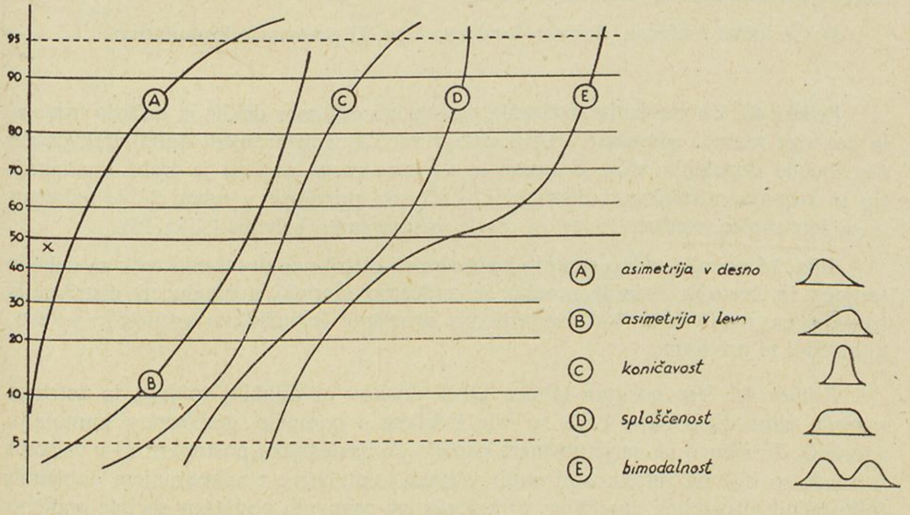


Slika 13b. Kumulative normalnih distribucij



Slika 13c. Kumulative normalnih distribucij na verjetnostnem papirju

premice, torej analizirati distribucijo v primerjavi z normalno. Na sliki 14 vidimo, kakšne oblike imajo kumulative nenormalnih distribucij za posamezne vrste nenormalnosti, če te kumulative rišemo na verjetnostnem papirju.



Slika 14. Oblike kumulativ različnih tipov frekvenčnih distribucij, narisanih na verjetnostnem papirju

Poudarjenost značilnosti, ki so nakazane na sliki 14, pomeni poudarjenost lastnosti frekvenčne distribucije.

55.2 Risanje realnih distribucij

Na verjetnostnem papirju rišemo realne distribucije, da iz njih analiziramo tip krivulje. Enako je verjetnostna skala primerna za mehanično izglajevanje frekvenčnih distribucij, ker je najlaže izglajevati krivulje, ki se ne odklanjajo mnogo od premice. Verjetnostne skale moremo s pridom uporabiti pri sestavljanju testnih norm. Grafičen način omogoča v tem primeru direktno odčitanje centilnih rangov in z-rezultatov iz predhodno, z mehaničnim izglajevanjem, izravnanih kumulativ.

Dano stvarno frekvenčno distribucijo moremo narisati kot kumulativo na verjetnostnem papirju po naslednjem postopku:

a) Iz frekvenčne distribucije izračunamo kumulativo absolutnih frekvenc.

b) Za dobljeno kumulativno serijo izračunamo relativne kumulativne frekvence.

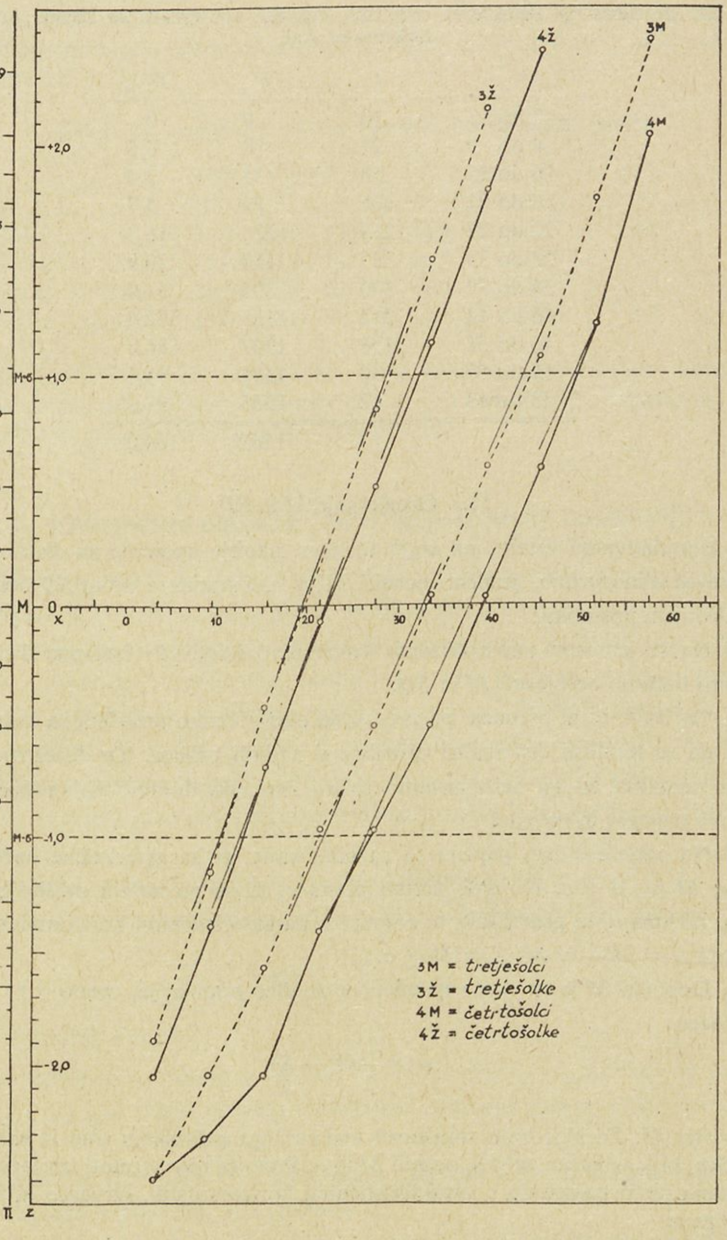
c) Relativne kumulativne frekvence vnesemo na verjetnostni papir tako, da v absciso vnašamo spodnje meje razredov, v ordinato pa, glede na verjetnostno skalo, ustrezajoče kumulative relativnih frekvenc.

d) Če točke zvežemo, dobimo lomljeno črto, ki ponazarja kumulativo.

Primer 43. Za zmožnost testiranja mehanskih odnosov deklic in dečkov tretjega in četrtega razreda gimnazij v LRS smo z vzorčnim testiranjem dobili frekvenčne distribucije doseženih točk. S pomočjo verjetnostnega papirja je treba analizirati tip in stopnjo normalnosti distribucij. Računski postopek v tabeli 23 je nakazan le za četrtošolce, medtem ko so za ostale vrisane samo krivulje (slika 15).

Slika 15 pokaže veliko stopnjo normalnosti distribucij doseženih točk za deklice tretjega in četrtega razreda, enako še zadostno stopnjo normalnosti distribucije tretješolcev, medtem ko kaže distribucija dosežkov četrtošolcev asimetrijo v levo, ki pa tudi ni pretirana.

Primer 44. Vse normne tablice DAT dijakov in dijakinj tretjega in četrtega razreda gimnazij 1957 v LRS so bile izdelane s pomočjo grafikonov kumulativ vzorčnih distribucij na verjetnostnem papirju po naslednjem postopku: a) v velikem formatu so bile na verjetnostni papir včrtane kumulative z anketiranjem dobljenih frekvenčnih distribucij dosežkov; b) kumulative osnovnih podatkov so bile grafično izravnane; c) centilne in T-normne tablice so bile za posamezne teste odčitane iz izravnanih kumulativ.



Slika 15. Kumulative dosežkov pri testiranju zmožnosti mehanskega presojanja deklic in dečkov tretjega in četrtega razreda gimnazij, risane na verjetnostnem papirju

Tabela 23. Izračunavanje kumulative relativnih frekvenc kot osnove za risanje krivulje na verjetnostni skali

z	f	F	$F\%$
—2 do 3	10	0	0
4 do 9	21	10	0,6
10 do 15	58	31	2,0
16 do 21	166	89	5,7
22 do 27	213	225	16,3
28 do 33	337	468	29,9
34 do 39	330	805	51,4
40 do 45	212	1135	72,4
46 do 51	158	1347	86,0
52 do 57	50	1505	96,1
58 do 63	12	1555	99,3
		1567	100,0

55.3 Ocenjevanje *M* in *SD*

S kumulativnimi črtami na verjetnostnem papirju moremo za distribucije, ki niso preveč abnormalne, grafično oceniti M in σ. Parametre M in SD ocenjujemo po naslednjem postopku:

a) Na verjetnostni papir včrtamo kumulativo relativnih frekvenc distribucije, za katero hočemo ocenjevati M in SD.

b) Tej liniji, če ni premica, po presoji na oko včrtamo premico, za katero smatramo, da se lomljeni črti realne distribucije najbolj prilega. To dosežemo s prozornim ravnilom, ki ga naravnavamo toliko časa, da dobimo najugodnejšo lego odklonov navzgor in navzdol.

c) Na verjetnostnem papirju so zaznamovane tri karakteristične horizontale: $M - \sigma$, M in $M + \sigma$. Ko smo včrtali premico, ki se po našem mišljenju najbolj prilega, odčitamo na presečiščih te premice s karakterističnimi horizontalami ocene vrednosti $S = M - \sigma$, M, $Z = M + \sigma$.

d) Dobljeni M je že ocena aritmetične sredine populacije, oceno σ pa dobimo po obrazcu

$$\sigma = \frac{1}{2}(Z - S) \tag{55}$$

Primer 45. Za štiri teste zmožnosti mehanskega presojanja smo iz slike 15 po postopku, ki je nakazan zgoraj, ocenili M in σ. Premice niso v celoti izčrtane, temveč so včrtana samó presečišča s karakterističnimi horizontalami. Drugače bi bila slika prenatrpana.

V tabelo 24 so vneseni iz grafikona odčitani podatki, izračunane ocene in vpisane prave — izračunane vrednosti parametrov. Primerjava ocen in pravih vrednosti pokaže, da je metoda v našem primeru dala razmeroma dobre rezultate, saj je največji odklon ocene od prave vrednosti pri aritmetični sredini 1,5 ‰, pri standardnem odklonu pa 3,3 ‰.

Tabela 24. Ocenjevanje M in σ s pomočjo verjetnostnega papirja

Razred — spol	Odčitano iz grafikona S	M	Z	M ocena	M prava	σ ocena	σ pravi
Tretješolci	21,7	32,6	43,4	32,6	33,1	10,9	11,1
Tretješolke	11,3	19,8	28,7	19,8	19,8	8,7	9,0
Četrtošolci	26,5	38,0	49,0	38,0	38,4	11,2	10,9
Četrtošolke	13,0	22,2	31,7	22,2	22,4	9,4	9,5

Jasno je, da te metode ne bomo uporabili, kadar ne gre za analizo distribucije, temveč je treba izračunati samo parametra M in σ. V tem primeru je risanje grafikona prezamudno in je računski postopek običajno krajši.

56. Prilagoditev normalne distribucije stvarnim distribucijam

Frekvenčna distribucija, ki jo dobimo, ako stvarne podatke uredimo, nima take lepe oblike kot normalna, kljub temu da ni razloga, da populacija ni normalna. Slučajni vzroki, ki so tem večji, čim manjša je populacija, so vzrok tem neregularnostim v frekvencah. Zaradi tega nastopi v praksi problem, poiskati normalno distribucijo, iz katere so te neregularnosti odpravljene. Problem obstoji v tem, da je treba k dani frekvenčni distribuciji poiskati normalno distribucijo, ki ima isti obseg N, isto aritmetično sredino M in isti standardni odklon SD kot stvarna distribucija. Ta problem moremo z uporabo tabele površin F za normalno distribucijo rešiti takole:

a) Za stvarno frekvenčno distribucijo f izračunamo M in σ.

b) Zgornje meje razredov frekvenčne distribucije izrazimo po obrazcu

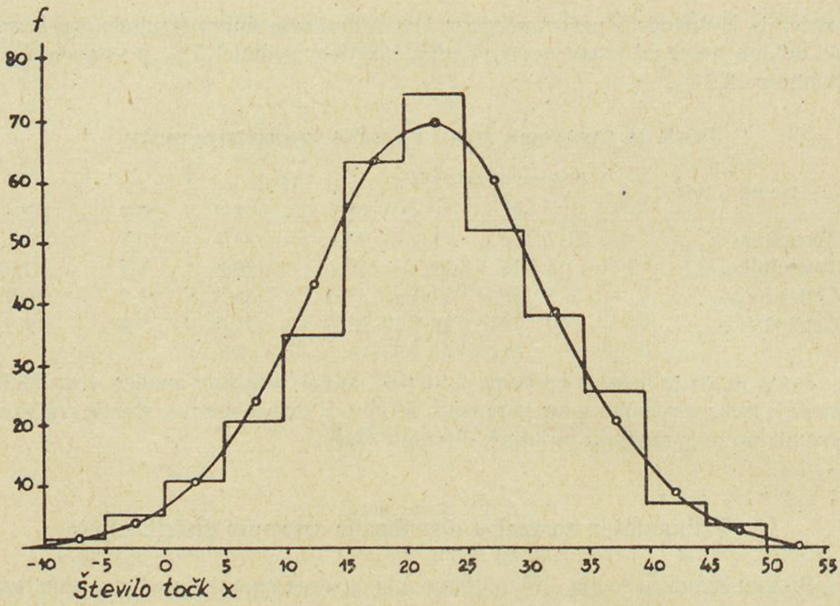
$$\frac{x_{k,max} - M}{\sigma} = z_{k,max} \tag{56}$$

v standardiziranih odklonih.

c) Iz tabele B poiščemo posameznim vrednostim $z_{k,max}$ ustrezajoče relativne frekvence $F(z_{k,max})$. Tako dobimo kumulativo relativnih frekvenc normalne distribucije F^0.

d) Relativne frekvence f^0 v posameznih razredih dobimo z odštevanjem dveh sosednih kumulativnih relativnih frekvenc F^0.

e) Absolutne frekvence normalne distribucije f pa dobimo, ako relativne frekvence f^0 pomnožimo s številom enot populacije N.



Slika 16. Dejanska distribucija in prilagojena normalna distribucija testiranja presojanja mehanskih odnosov (četrtošolke v LRS)

Primer 46. Distribuciji testiranja zmožnosti presojanja mehanskih odnosov za četrtošolke na gimnazijah z enim četrtim oddelkom priredimo normalno distribucijo po zgornji shemi.

Za frekvenčno distribucijo v tabeli 25 je $M = 22,42$, $\sigma = 10,08$. Serijo vrednosti z za meje razredov smo dobili na lahek način tako, da smo za najnižjo mejo $x_{1,max} =$ $= —9,5$ izračunali ustrezajoči z_1

$$z_1 = \frac{—9,5 — 22,24}{10,08} = —3,17$$

naslednje vrednosti z pa smo dobili s sukcesivnim prištevanjem razrednega intervala, merjenega v z-enotah:

$$i_z = \frac{i}{\sigma} = \frac{5}{10,08} = 0,4960$$

V sliki 16 je vrisana v obliki histograma dejanska distribucija, s krivuljo pa prilagojena normalna distribucija.

Tabela 25. Prilagajanje normalne distribucije distribuciji testiranja zmožnosti presojanja mehanskih odnosov četrtošolk gimnazij z enim oddelkom

Razred	x	f	z	$10^4 \bar{P}$	$10^4 f_t^0$	f_t
—9 do —10		0			8	0,3
	—9 5		—3,17	8		
—9 do —5		1			30	1,0
	—4,5		—2,67	38		
—4 do 0		5			112	3,8
	0,5		—2,17	150		
1 do 5		11			315	10,7
	5,5		—1,67	465		
6 do 10		21			725	24,8
	10,5		—1,18	1190		
11 do 15		45			1261	43,1
	15,5		—0.69	2451		
16 do 20		61			1795	61,4
	20,5		—0,19	4246		
21 do 25		72			1971	67,3
	25,5		+0,31	6217		
26 do 30		52			1664	56,9
	30,5		+0,80	7881		
31 do 35		38			1151	39,3
	35,5		+1,30	9032		
36 do 40		26			601	20,5
	40,5		+1,79	9633		
41 do 45		7			257	8,8
	45,5		+2,29	9890		
46 do 50		3			84	2,9
	50,5		+2,79	9974		
51 do		0			36	1,2
		342		10000	10000	342,0

6 KORELACIJA

60. Splošno

60.0 Pojem

V prejšnjih poglavjih smo s pomočjo frekvenčnih distribucij, sredin in mer variacije opisovali in analizirali posamezne znake populacij. Te metode omogočajo izolirano analizo posameznih znakov. Vendar vemo, da so pojavi v medsebojni zvezi, vplivajo drug na drugega in se medsebojno prepletajo s svojimi učinki. Zaradi tega razdeljujemo znake na faktorialne in rezultativne. Ta delitev znakov izvira iz vzročne povezave pojavov, katerih kvantitativni izraz je statistični znak. Tako je na primer število doseženih točk pri določenem testu kot izraz določene zmožnosti odvisno od spola, starosti, socialne skupine, kateri testiranec pripada, in tako dalje.

Vendar je vzročna odvisnost samo ena izmed možnih povezav med pojavi. Poleg njih imamo še druge, ki niso vezane med seboj kot vzrok in posledica. Število doseženih točk pri mehanskem testu ni vzročno odvisno od števila točk, doseženih pri računskem testu, vendar sta ta dva rezultata med seboj odvisna — povezana. Vzrok temu je isti kompleks faktorjev, ki vpliva na oba pojava (starost, spol, socialna skupina itd.). Posledica tega je, da sta ta dva pojava odvisna, čeprav ne vzročno.

Proučevanje odvisnosti pojavov je v psihologiji še prav posebno važno. Velik del kvantitativnega proučevanja v psihologiji se ukvarja ravno z iskanjem zvez, odvisnosti in vzročnosti med posameznimi pojavi. To omogoča analiziranje delovanja faktorjev, ki vplivajo na določen pojav, dajanje prognoz iz poznavanja dejstev v sedanjosti in tako dalje. Statistika daje možnost in metode za analiziranje in objektivno merjenje teh odnosov.

60.1 Funkcionalne odvisnosti

O funkcionalni odvisnosti v matematičnem smislu govorimo v primeru, da vsaki vrednosti neodvisne spremenljivke x ustreza ena ali nekaj točno določenih vrednosti odvisne spremenljivke y.

Ta odvisnost more biti dana na več načinov:

a) z določenim pravilom, ki v obliki enačbe

$$y = f(x) \tag{57}$$

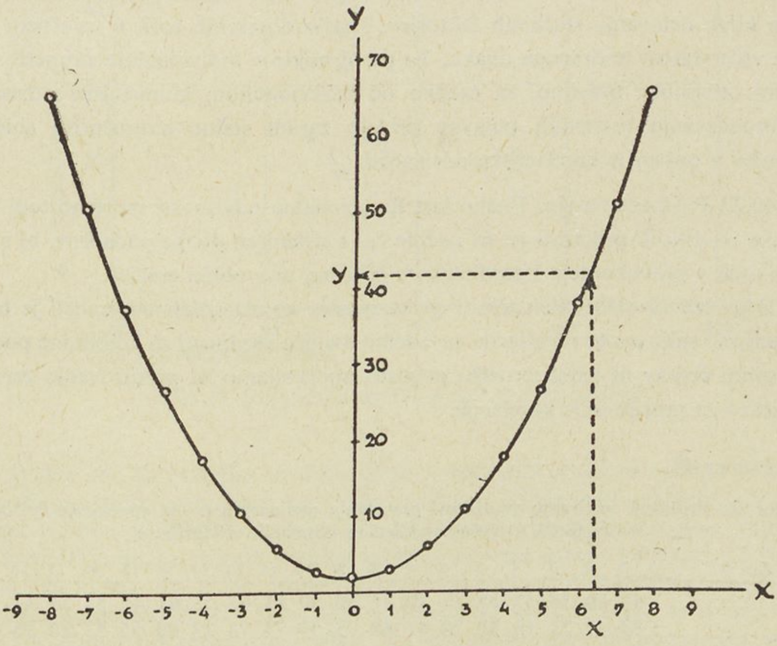
podaja zvezo med odvisno in neodvisno spremenljivko;

b) z grafikonom, v katerem je v obliki krivulje razvidna zveza med x in y;

c) s serijo dvojic podatkov za x in y.

Primer 47. Funkcionalna odvisnost med x in y je dana z enačbo $y = x^2 + 2$. Iz te enačbe moremo za vsako vrednost x izračunati ustrezajočo vrednost y.

Ista funkcionalna odvisnost je grafično prikazana v sliki 17. Tudi iz slike moremo na način, ki je nakazan v sliki, vsaki vrednosti x poiskati ustrezajočo vrednost y.



Slika 17. Grafični prikaz funkcije $y = x^2 + 2$

V obliki sistema dvojic vrednosti x in y pa je zgornja odvisnost za nekaj vrednosti prikazana v tabeli 25. Iz te tabele moremo direktno odbrati posamezni vrednosti x ustrezajočo vrednost y in obratno.

Tabela 25. Funkcionalna odvisnost $y = x^2 + 2$, prikazana z dvojicami vrednosti

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	2	3	6	11	18	27	38	51	66	83	102

60.2 Korelacijske odvisnosti

60.21 Pojem. Ako prenesemo pojem funkcionalne odvisnosti na masovne pojave, bi v primeru funkcionalne odvisnosti med starostjo in številom doseženih točk pri testiranju bilo število točk s starostjo točno določeno. Vsaka oseba iste starosti bi dosegla pri testiranju enako število točk. Na prvi pogled je jasno, da ni tako. Vzrok temu so faktorji, ki poleg starosti vplivajo na določeno zmožnost oziroma na doseženo število točk. Ti dostikrat niso določljivi in jih v tem primeru štejemo med slučajne faktorje. Nikakor ni možno teh učinkov do kraja izločiti. Ti faktorji imajo za rezultat, da se kljub isti starosti testirancev doseženi rezultati med seboj razlikujejo, tem bolj — čim večji je učinek teh faktorjev. S tem pa ni rečeno, da število doseženih točk ni odvisno od starosti. Pri točnejšem proučevanju vidimo, da se kljub delovanju slučajnih faktorjev, število doseženih točk v splošnem veča, če se veča starost testiranega dijaka. To pa ni nujno v individualnih primerih. Tem vrstam odvisnosti pravimo, za razliko od funkcionalnih, korelacijske odvisnosti. Pri proučevanju masovnih pojavov pridejo zaradi stalne navzočnosti slučajnih faktorjev v poštev le korelacijske odvisnosti.

60.22 Prikazovanje. Enako kot funkcionalne odvisnosti moremo tudi korelacijske odvisnosti prikazati na tri načine: a) s sistemom dvojic podatkov, b) s sistemom točk v pravokotnem koordinatnem sistemu, c) v obliki enačbe.

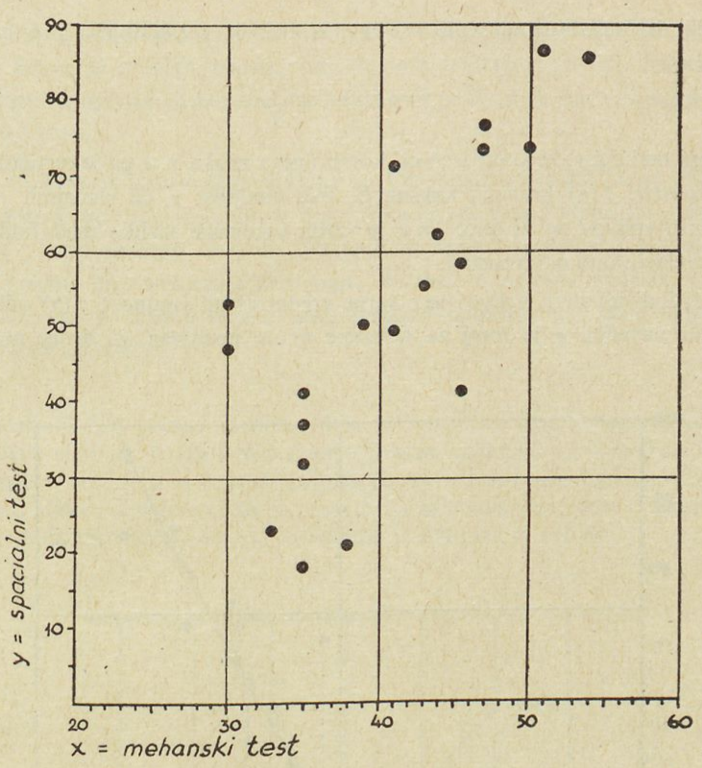
Eden izmed običajnih načinov prikazovanja korelacijskih odvisnosti je tabela, v kateri za vsako enoto populacije navedemo dvojico vrednosti za korelirane podatke. Ta način, čeprav ni najnazornejši, pogosto uporabljamo za prikazovanje osnovnih podatkov za proučevanje korelacije.

Primer 48.

Tabela 26. Rezultati testiranja zmožnosti presojanja mehanskih (x) in spacialnih (y) odnosov dvajsetih tretješolcev klasične gimnazije v Mariboru

Zap. št.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x	46	46	38	35	35	39	30	51	50	30	41	47	33	41	43	35	54	47	35	44
y	58	41	21	18	32	50	47	86	73	53	71	73	23	49	55	37	85	76	41	62

Čeprav so v tabeli 26 dani točni osnovni podatki, ta način ni nazoren in iz njega težko sklepamo, ali in kakšna je korelacija med obravnavanima pojavoma. Te podatke moremo preslikati v grafikon, ki ga imenujemo *korelacijski grafikon.* Dvojico podatkov za posamezno enoto ponazorimo s točko s koordinatama x in y. Podatki cele populacije so ponazorjeni z meglico točk, ki jih je toliko, kolikor je enot populacije. Iz korelacijskega grafikona je korelacija med x in y vidna neposredno, ker moremo vizualno obseči vse podatke hkrati.



Slika 18. Korelacijski grafikon podatkov iz tabele 26

Primer 49. Za podatke iz tabele 26 je korelacijski grafikon narisan v sliki 18. Iz grafikona moremo razbrati vse tipične lastnosti korelacijske odvisnosti. Tako na primer vidimo, da 35 točkam, ki so jih dosegli pri testiranju presojanja mehanskih odnosov štirje dijaki, ustreza različen dosežek pri spacialnem testu (18, 32, 37, 41), ne pa ena in ista, kot bi bil primer, če bi bila povezava funkcionalna. Opazimo pa, da se število doseženih točk pri spacialnem testu v splošnem dviga, če se veča število točk, doseženih pri mehanskem testu. Ta zakonitost pa v individualnih primerih ni nujna. Dijak številka 10 ima $x = 30$, $y = 53$, dijak številka 3 pa $x = 38$, $y = 21$, kar je v nasprotju s splošno tendenco.

60.3 Regresijske krivulje

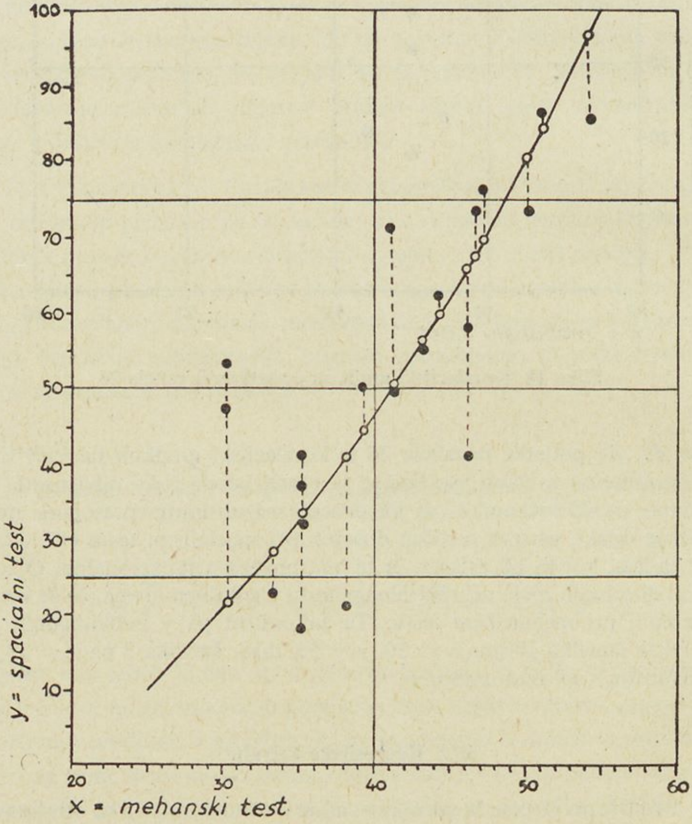
60.31 Problem. Ostane še vprašanje, ali je možno korelacijsko odvisnost izraziti v obliki enačbe, kot smo nakazali za funkcionalne odvisnosti. Ker je pri korelacijskih odvisnostih vrednost odvisne spremenljivke y rezultat faktorja x, s katerim je y

v korelaciji, in individualnih vplivov, katerih učinek zaznamujmo z e, moremo splošno pisati

$$y = f(x) + e \tag{58}$$

$f(x)$ pomeni tisti del y, ki je odvisen od koreliranega znaka x, e pa je rezultat individualnih vplivov. $f(x)$ pomeni, kakšna bi bila vrednost y, če slučajnih oziroma individualnih vplivov ne bi bilo. Ta e je vzrok vsebinske razlike med funkcionalnimi in korelacijskimi odvisnostmi.

Zaradi individualnih vplivov se stvarne vrednosti od vrednosti $f(x)$ odklanjajo navzgor ali navzdol. e je torej za nekatere enote pozitiven, za druge negativen.

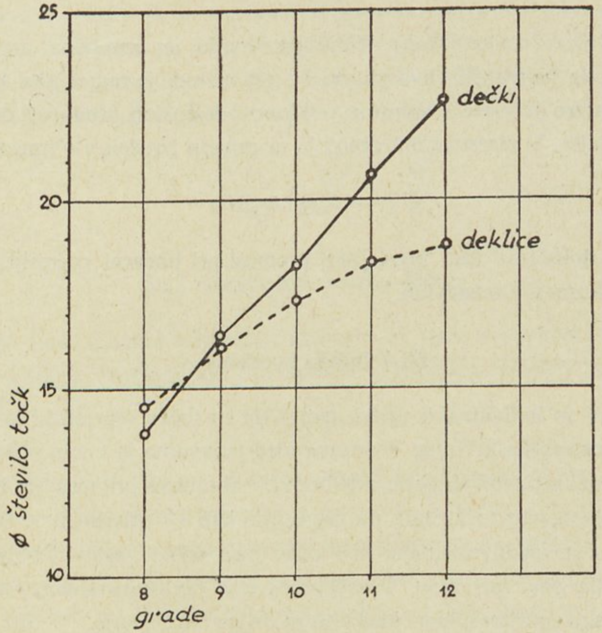


Slika 19. Prostoročno vrisana regresijska krivulja, včrtana v korelacijski grafikon iz slike 18

Določanje funkcije $f(x)$, ki jo imenujemo *regresijsko funkcijo* oziroma krivuljo, in e, s čimer je določen učinek individualnih faktorjev, je eden izmed osnovnih problemov regresijske in korelacijske analize in podlaga za niz zaključkov o odvisnosti med pojavi.

60.32 Prostoročno ugotavljanje. Če pogledamo sliko 18, se vsiljuje ideja, da leži zaradi zgornjih zakonitosti regresijska krivulja med vrisanimi točkami in da moremo — če sledimo tendenci teh točk — vrisati regresijsko krivuljo prostoročno. Vrisano črto smatramo za ugodno, če sledi tej splošni tendenci. Ta način je subjektiven, ga pa zaradi enostavnosti pogosto uporabljamo, zlasti v začetni fazi proučevanja korelacije.

Primer 50. Za primer iz slike 18 je prostoročno vrisana regresijska krivulja, prikazana v sliki 19. Točke • prikazujejo stvarne vrednosti y, točke ○ na krivulji pa ponazorujejo vrednosti y, kakršne bi bile, če ne bi bilo individualnih vplivov. Razdalja med abscisno osjo in točko ○ predstavlja za posamezne enote rezultat učinka x na y, razdalja med točko • in ○ pa rezultat individualnih vplivov.



Slika 20. Število doseženih točk pri računskem testu ameriške mladine

60.33 Serija grupnih sredin. Serija grupnih sredin za y, pri čemer so grupe formirane po znaku x, prav tako zelo dobro pokaže regresijsko krivuljo odvisnosti y od x. Ta lastnost izvira iz tega, ker je srednja vrednost izraz bistvenega faktorja, ki se v tem primeru od grupe do grupe spreminja, sredine pa pokažejo spremembo y pri spremembi faktorja x.

Primer 51. Odvisnost doseženih točk pri računskem testu od stopnje šolske izobrazbe in spola je za ameriško mladino nazorno vidna iz tabele 27 in slike 20. S stopnjo šolske izobrazbe se računske zmožnosti pri obeh spolih večajo, vendar pri dečkih hitreje kot pri deklicah.

Tabela 27. Povprečno število točk, doseženih pri testiranju računskih zmožnosti pri ameriški mladini

Grade	Povprečno število točk dečki	deklice
8	13,8	14,5
9	16,3	16,1
10	18,2	17,3
11	20,6	18,3
12	22,6	18,7

60.34 Analitična metoda. Najobjektivnejša je analitična metoda, katere osnova je metoda najmanjših kvadratov. Po tej metodi je regresijska krivulja tista funkcija, za katero je vsota kvadratov odklonov dejanskih vrednosti od regresijske krivulje najmanjša. V matematični obliki je ta princip izražen v obrazcu

$$\Sigma\,[y - f(x)]^2 = Min \tag{59}$$

Po tej metodi določamo tudi regresijske premice pri linearni regresiji, ki jo bomo obravnavali v kasnejših odstavkih.

60.4 Indeks korelacije

Čim manjši so individualni vplivi, tem bliže so točke regresijski krivulji in tem bolj je vidna regresijska krivulja. Povezava med pojavoma je v tem primeru tesnejša kot v primeru velikih individualnih odklonov. V skrajnem primeru, da individualnih odklonov sploh ni, vse točke leže na regresijski črti — odvisnost je funkcionalna. Dva pojava pa sta neodvisna, ako ni možno med točke postaviti nobene krivulje, ki bi nakazovala smer povezave. V tem primeru je $f(x)$ konstanten, y je torej od x neodvisen. Realni primeri nihajo med eno in drugo skrajnostjo.

Variacija znaka y je rezultat vpliva faktorja x in individualnih vplivov e. Po stavku o razstavljanju varianc v sestavne dele (glej obrazec 46!) moremo celotno varianco σ_y^2 razdeliti v dva dela: v varianco, ki izvira iz odvisnosti y od znaka x; $\sigma_{y.x}^2$ in varianco, ki je rezultat individualnih vplivov; σ_e^2. Po tem stavku velja zveza iz obrazca

$$\sigma_y^2 = \sigma_{y.x}^2 + \sigma_e^2 \tag{60}$$

Če to enačbo delimo s σ_y^2, dobimo v obrazcu

$$1 = \frac{\sigma_{y.x}^2}{\sigma_y^2} + \frac{\sigma_e^2}{\sigma_y^2} \tag{61}$$

razdelitev variance v obliki koeficientov. Če štejemo celotno varianco kot enoto, $\sigma_{y.x}^2/\sigma_y^2$ pomeni, koliki del celotne variance gre na račun povezanosti znaka y s koreliranim znakom x, σ_e^2/σ_y^2 pa, koliki del celotne variance gre na račun individualnih vplivov. V skrajnem primeru funkcionalne povezave je $\sigma_e^2 = 0$ ali kot sledi iz obrazca 61 $\sigma_{y.x}^2/\sigma_y^2 = 1$. Obratno velja: čim večji so individualni vplivi, tem manjša je odvisnost in s tem del variance, ki izvira iz povezanosti y z x. V skrajnem primeru nepovezanosti je $\sigma_{y.x}^2/\sigma_y^2 = 0$. Količnik $\sigma_{y.x}/\sigma_y$, ki ga splošno imenujemo *indeks korelacije*, more torej dobro rabiti kot merilo jakosti povezave, ker pove, koliki del celotne variacije izvira iz odvisnosti med x in y. Najmanjša vrednost indeksa korelacije je 0, in sicer v primeru neodvisnosti med x in y. Največja vrednost indeksa korelacije pa je 1, ki ga doseže pri funkcionalni povezavi. Ostale vrednosti med 0 in 1 pomenijo rahlejšo (indeks bliže 0) ali tesnejšo (indeks bliže 1) povezavo. Indeks korelacije $I_{y.x}$ moremo z zgornjimi zvezami pisati v več oblikah

$$I_{y.x} = \frac{\sigma_{y.x}}{\sigma_y} = \sqrt{1 - \frac{\sigma_e^2}{\sigma_y^2}} \tag{62}$$

60.5 Standardna napaka ocene

V primeru funkcionalne odvisnosti moremo za vsak x enolično določiti vrednost y. Čeprav to pri korelacijskih odvisnostih ni mogoče, moremo smatrati regresijsko krivuljo

$$y' = f(x) \tag{63}$$

kot oceno dejanskih vrednosti y za določeno enoto, če poznamo vrednosti x. Napaka, ki jo napravimo v posameznem primeru ocenjevanja, je enaka učinku individualnih vplivov e na to enoto. Tega učinka v posameznem primeru ne poznamo, pač pa vemo, da je v splošnem manjši, čim večja je povezava med x in y. Skupno merilo učinka individualnih vplivov je njihov standardni odklon σ_e. Ker moremo v primeru, da so individualni odkloni slučajni, sklepati na to, da so distribuirani normalno z $M_e = 0$ in standardnim odklonom σ_e, so ti odkloni precej osvetljeni. Vemo namreč, da je ca. $^2/_3$ odklonov manjših od σ_e, da je zelo malo odklonov (ca. 5 %), ki so večji od $2\sigma_e$ itd. Ker σ_e sumarno meri napako, ki jo napravimo pri ocenjevanju z regresijsko krivuljo, imenujemo σ_e *standardno napako ocene.* Če poznamo skupno varianco v σ_y^2 in indeks korelacije $I_{y.x}$, moremo standardno napako ocene izračunati iz obrazca

$$\sigma_e = \sigma_y \sqrt{1 - I_{y.x}^2} \tag{64}$$

ki smo ga dobili direktno iz obrazca 62.

Problem ocenjevanja z regresijskimi krivuljami je velikega praktičnega pomena za psihološka merjenja, ker na njih bazira velik del metod, ki se ukvarjajo s prognozami.

61. Linearna korelacija

61.1 Osnova

Zgornja teoretična razglabljanja o korelaciji veljajo za kateri koli tip regresijske krivulje in so v tem pogledu splošna. Tip krivulje je odvisen od pojava, katerega proučujemo, in je v ozki zvezi z vsebino pojava. Praktično izračunavanje vseh navedenih količin: regresijske krivulje, indeksa korelacije in standardne napake ocene za splošen tip presega naš okvir. Pač pa je računski postopek za primer, da je povezava linearna, razmeroma enostaven. Razen tega je linearna korelacija toliko pomembna, da ji bomo posvetili posebno pažnjo. V praksi se namreč linearna odvisnost zelo pogosto pojavlja.

Pri linearni odvisnosti je regresijska krivulja premica. V obliki enačbe je regresijska premica napisana v obrazcu

$$y' = M_y + b_1 (x - M_x) \tag{65}$$

Pri tem pomenita: M_x in M_y aritmetični sredini koreliranih znakov, y' je ocenjena vrednost y, b_1 pa je smerni koeficient premice, ki ga imenujemo *regresijski koeficient.* Regresijski koeficient b_1 pove, za koliko se v povprečju spremeni vrednost y, če se vrednost znaka x spremeni za enoto. Regresijski koeficient izračunavamo po obrazcu

$$b_1 = \frac{c_{xy}}{\sigma_x^2} \tag{66}$$

V tem obrazcu c_{xy} pomeni *kovarianco,* ki je po definiciji

$$c_{xy} = \frac{1}{N} \sum (x - M_x)(y - M_y) \tag{67}$$

povprečen produkt odklonov x in y od ustrezajočih aritmetičnih sredin M_x in M_y.

Kvadrat indeksa korelacije, ki ga v primeru linearne korelacije imenujemo *determinacijski koeficient*, zaznamujemo pa z r_{xy}^2, izračunavamo po obrazcu

$$r_{xy} = \frac{c_{xy}^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} \qquad (68)$$

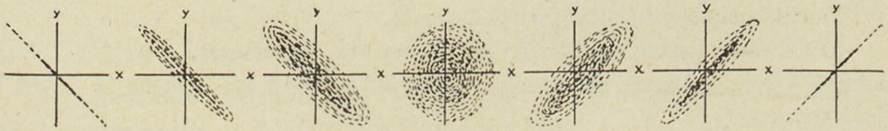
Determinacijski koeficient pove, koliki del celotne variance σ_y^2 gre na račun linearne povezave med x in y.

Kot merilo jakosti linearne korelacije dostikrat rabi *korelacijski koeficient* r_{xy}, ki je kvadratni koren iz determinacijskega koeficienta. r_{xy} ima to prednost, da je glede na predznak kovariance pozitiven ali negativen.

$$r_{xy} = \frac{c_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \qquad (68)$$

Korelacijski koeficient pa ima to slabo lastnost, da nima take zveze z vsebino pojava kot determinacijski koeficient. Vendar ga kljub temu splošno uporabljamo.

Vrednosti korelacijskega koeficienta r_{xy} gredo od -1 do $+1$. Korelacijski koeficient je negativen, kadar je povezava med x in y take vrste, da z večanjem enega znaka vrednost koreliranega znaka v povprečju pada. Kot primer negativne korelacije moremo vzeti na primer korelacijo med starostjo in umskimi zmožnostmi starih ljudi. Z večjo starostjo umske zmožnosti v splošnem padajo. V tem primeru govorimo o negativni korelaciji. V primeru pozitivne korelacije je vrednost korelacijskega koeficienta pozitivna. V primeru pozitivne korelacije povečanju znaka x ustreza povečanje znaka y. Kot primer pozitivne korelacije moremo vzeti obravnavani primer korelacije med zmožnostmi presojanja mehanskih in spacialnih odnosov za mariborske dijake (glej sliki 18 in 19!).



$r = -1$ $\quad r \leq 0$ $\quad r < 0$ $\quad r = 0$ $\quad r > 0$ $\quad r \geq 0$ $\quad r = +1$

Slika 21. Vrednosti korelacijskega koeficienta r pri različnih razmestitvah točk v korelacijskem grafikonu

Jakost korelacije in s tem tudi vrednost korelacijskega koeficienta moremo približno razbrati že iz razmestitve točk v korelacijskem grafikonu. Slika 21 kaže te odnose za nekaj tipičnih primerov. Kadar je vrednost korelacijskega koeficienta ne glede na predznak manjša kot 0,20, govorimo o zelo rahli povezavi, ki jo moremo v večini primerov praktično zanemariti. Vrednosti korelacijskega koeficienta med 0,20 in 0,40 kažejo nizko, toda določeno korelacijo. Korelacijski koeficienti med 0,40 in 0,70 pomenijo zmerno povezavo, koeficienti med 0,70 in 0,90 so znak visoke povezave. Korelacijski koeficienti od 0,90 naprej pa so znak zelo visoke korelacijske povezanosti. Korelacijski koeficient ima vrednost 1 tedaj, kadar sta pojava v medsebojni funkcijski linearni zvezi.

Standardno napako ocene σ_e moremo za linearno korelacijo pisati v obliki obrazca

$$\sigma_e = \sigma_y \sqrt{1 - r_{xy}^2} \tag{70}$$

Ta obrazec je samo za linearno korelacijo preveden obrazec 64.

Vse, kar smo v tem odstavku povedali o korelacijski odvisnosti y od x, moremo tehnično obrniti in iskati odvisnost x od y. Vlogi odvisne in neodvisne spremenljivke se samo zamenjata. V vseh obrazcih od 65 do 70 se v tem primeru x zamenja z y in obratno y z x. Iz tega vidimo, da imamo pravzaprav dve regresijski premici, dva regresijska koeficienta in dve standardni napaki ocene. Korelacijski koeficient in determinacijski koeficient pa pri tej zamenjavi ostaneta ista. Vendar pride v poštev analiza obeh primerov le v primeru čistih korelacijskih odvisnosti, v vzročnih pa vedno vzamemo vzrok kot neodvisno x, posledico pa kot odvisno spremenljivko y.

61.2 Izračunavanje pokazateljev linearne korelacije iz negrupiranih podatkov

Pokazatelje linearne korelacije moremo praktično izračunati po treh metodah: a) *direktni metodi*, b) *metodi pomožnega znaka* in v c) *metodi diferenc.*

61.21 Direktna metoda. Po direktni metodi izračunavamo pokazatelje linearne korelacije po naslednjih stopnjah:

a) Izračunamo aritmetični sredini M_x in M_y.

b) Od individualnih vrednosti x odštejemo M_x, od vrednosti y pa M_y. Tako dobimo kolone odklonov individualnih vrednosti od aritmetičnih sredin $(x - M_x)$, $(y - M_y)$.

c) Te odklone kvadriramo in pomnožimo med seboj. Dobimo kolone $(x - M_x)^2$, $(y - M_y)^2$, $(x - M_x)(y - M_y)$.

d) Kvadrate in produkte odklonov seštejemo. Tako dobimo

$$K_x = \Sigma(x - M_x)^2; \quad K_y = \Sigma(y - M_y)^2; \quad K_{xy} = \Sigma(x - M_x)(y - M_y) \tag{71}$$

e) Pokazatelje linearne korelacije izračunamo iz teh količin po obrazcih

$$b_1 = \frac{K_{xy}}{K_x}; \quad y' = M_y + b_1(x - M_x); \quad r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sqrt{K_x K_y}}; \quad \sigma_e = \sigma_y \sqrt{1 - r_{xy}^2} \tag{72}$$

Čeprav pridemo po tej metodi do rezultatov z direktno uporabo osnovnih obrazcev, je ta način tehnično zelo dolgotrajen, ker so odkloni od aritmetičnih sredin običajno decimalna števila; to pa komplicira kvadriranje in množenje. Ker ta način redko uporabljamo, zanj ne bomo navajali primera.

61.22 Metoda pomožnih znakov u in v. Hibam, ki jih ima direktna metoda, se izognemo z metodo pomožnih znakov u in v. Princip vpeljave pomožnega znaka nam je znan že iz metod izračunavanja variance. V tem primeru je samo prirejen specifičnim potrebam. Stopnje izračunavanja pokazateljev linearne korelacije so v tem primeru naslednje:

a) Glede na vrednosti znakov x in y izberemo okrogle vrednosti x_0 in y_0 nekje med stvarnimi vrednostmi x in y.

b) Poiščemo razlike $(x - x_0) = u$ in $(y - y_0) = v$. Te razlike so pomožni znaki u in v.

c) Izračunamo kvadrate in produkte u in v. Dobimo kolone u^2, v^2 in uv.

d) Seštejemo kolone vrednosti u, v, u^2, v^2 in uv. Tako dobimo $\Sigma u = U$; $\Sigma v = V$; Σu^2; Σv^2; Σuv.

e) Iz teh količin izračunamo naslednje izraze:

$$M_x = x_0 + \frac{U}{N}; \quad M_y = y_0 + \frac{V}{N} \tag{73}$$

$$K_x = \Sigma u^2 - \frac{u^2}{N}; \quad K_y = \Sigma v^2 - \frac{V^2}{N}; \quad K_{xy} = \Sigma uv - \frac{U \cdot V}{N} \tag{74}$$

f) Iz njih dobimo kot pri direktni metodi

$$b_1 = \frac{K_{xy}}{K_x}; \quad y' = M_y + b_1(x - M_x); \quad r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sqrt{K_x K_y}}; \quad \sigma_e = \sigma_y \sqrt{1 - r_{xy}^2} \tag{75}$$

Opomba: Kadar ni razloga za vpeljavo posebnih vrednosti x_0 in y_0, vzamemo kot najenostavneje $x_0 = 0$ in $y_0 = 0$. V tem primeru je $u = x$ in $v = y$. Ves nadaljnji postopek ostane isti, le da namesto z u in v vse računske operacije izvajamo z originalnimi vrednostmi x in y. Ta način ima prednosti predvsem, kadar računamo s strojem.

V primerjavi z direktno metodo je po tej metodi tehnično delo znatno poenostavljeno, ker skrčimo podatke, s katerimi računamo, na enostavna števila. Edine komplikacije so zaradi predznakov.

Primer 52. Za odvisnost med rezultati testa zmožnosti presojanja mehanskih in spacialnih odnosov tretješolcev klasične gimnazije v Mariboru je računanje pokazateljev korelacije z vpeljavo pomožnih znakov u in v naslednje:

Tabela 28. Izračunavanje pokazateljev linearne korelacije med rezultati mehanskega (x) in spacialnega (y) testiranja za 20 tretješolcev mariborske klasične gimnazije po metodi pomožnih znakov u in v

x	y	u	v	u^2	v^2	uv
46	58	+6	+8	36	64	+48
46	41	+6	—9	36	81	—54
38	21	—2	—29	4	841	+58
35	18	—5	—32	25	1024	+160
35	32	—5	—18	25	324	+90
39	50	—1	0	1	0	0
30	47	—10	—3	100	9	+30
51	86	+11	+36	121	1296	+396
50	73	+10	+23	100	529	+230
30	53	—10	+3	100	9	—30
41	71	+1	+21	1	441	+21
47	73	+7	+23	49	529	+161
33	23	—7	—27	49	729	+189
41	49	+1	—1	1	1	—1
43	55	+3	+5	9	25	+15
35	37	—5	—13	25	169	+65
54	85	+14	+35	196	1225	+490
47	76	+7	+26	49	676	+182
35	41	—5	—9	25	81	+45
44	62	+4	+12	16	144	+48
		+20	+51	968	8197	+2143
		U	V	Σu^2	Σv^2	Σuv

Z obrazci 73 dobimo:

$$M_x = 40 + \frac{+20}{20} = 41 \qquad M_y = 50 + \frac{+51}{20} = 52{,}55$$

Iz obrazcev 74 dobimo:

$$K_x = 968 - \frac{(+20)^2}{20} = 948 \qquad K_y = 8197 - \frac{(+51)^2}{20} = 8066{,}95$$

$$K_{xy} = +2143 - \frac{(+20)\,(+51)}{20} = +2092$$

Iz teh količin dobimo z obrazci 75

$$b_1 = \frac{+2092}{948} = +2{,}21 \qquad y' = 52{,}55 + 2{,}21\,(x - 41)$$

$$\sigma_y^2 = \frac{8066{,}95}{20} = 403{,}3475 \qquad \sigma_y = 20{,}1$$

$$r_{xy} = \frac{+2092}{948 \cdot 8066{,}95} = +0{,}757 \qquad \sigma_e = 20{,}1\sqrt{1 - 0{,}757^2} = 13{,}14$$

Praktičen pomen regresijske premice je v tem, da moremo iz nje napovedovati y, če poznamo vrednost x. Vzemimo na primer šestnajstega študenta, ki je dosegel pri mehanskem testu $x = 54$ točk. Če ta rezultat vnesemo v enačbo regresijske premice, dobimo: $y' = 52{,}55 + 2{,}21\,(54 - 41) = 81{,}28$ ali zaokroženo 81. Ocena doseženih točk pri spacialnem testu je vnaprej napovedana na 81 točk. Razlika ocene od dejansko doseženega rezultata je samo štiri točke. Ta rezultat je izredno dober, ker glede na velikost standardne napake ocene $\sigma_e = 13{,}14$ pričakujemo tudi veliko večje odklone.

Kot smo že navedli, moremo izračunati tudi drugo regresijsko premico, ki kaže obratno odvisnost mehanskega testa (x) od spacialnega (y). Regresijska premica je po pravilu, da simbola x in y samo zamenjamo, enaka

$$x' = M_x + b_2\,(y - M_y); \quad b_2 = \frac{K_{xy}}{K_y}; \quad \sigma_e = \sigma_x \sqrt{1 - r_{xy}^2} \tag{76}$$

Če vnesemo v obrazce podatke, dobimo:

$$b_2 = \frac{+2092}{8066{,}95} = +0{,}26 \quad x' = 41 + 0{,}26\,(y - 52{,}55)$$

$$\sigma_e = 6{,}89\sqrt{1 - 0{,}757^2} = 4{,}51$$

61.23 M e t o d a d i f e r e n c. Edina tehnična hiba metode pomožnih znakov u in v je v koloni uv. Medtem ko kvadrate majhnih števil znamo na pamet, večje pa poiščemo v tablicah kvadratov, je treba produkte dobiti z množenjem. Da se izognemo še temu množenju in vse osnovne računske operacije privedemo na kvadriranje, uporabljamo metodo diferenc. Ta metoda se v točkah a in b sklada s prejšnjo metodo. Enako tudi pri tej metodi:

a) Izberemo okrogli vrednosti x_0 in y_0, ki ležita med stvarnimi vrednostmi x in y.

b) Poiščemo vrednosti pomožnih znakov $x - x_0 = u$; $y - y_0 = v$.

c) Izračunamo diference med u in v: $u - v = d$.

d) Seštejemo kolone u, v in d. Tako dobimo $\Sigma u = U$, $\Sigma v = V$, $\Sigma d = D$. Kontrola: $U - V = D$.

e) Kvadriramo kolone u, v, d. Dobimo kolone kvadratov u^2, v^2, d^2.

f) Seštejemo kolone kvadratov. Dobimo Σu^2, Σv^2, Σd^2.

g) Iz teh količin izračunamo dalje:

$$M_x = x_0 + \frac{U}{N}; \quad M_y = y_0 + \frac{V}{N} \tag{77}$$

$$K_x = \Sigma u^2 - \frac{U^2}{N}; \quad K_y = \Sigma v^2 - \frac{V^2}{N}; \quad K_d = \Sigma d^2 - \frac{D^2}{N} \tag{78}$$

$$K_{xy} = {}^1/_2\,(K_x + K_y - K_d) \tag{79}$$

h) Enako kot pri prejšnjih metodah dobimo končne rezultate po obrazcih

$$b_1 = \frac{K_{xy}}{K_x}; \quad y' = M_y + b_1(x - M_x); \quad r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sqrt{K_x K_y}}; \quad \sigma_e = \sigma_y \sqrt{1 - r_{xy}^2} \tag{76}$$

Primer 53. Za problem korelacije med rezultati mehanskega in spacialnega testa 20 tretješolcev mariborske klasične gimnazije iz prejšnjega primera je izračunavanje pokazateljev korelacije naslednje:

Tabela 29. Izračunavanje pokazateljev korelacije med rezultati mehanskega (x) in spacialnega (y) testa po metodi diferenc

x	y	u	v	d	u^2	v^2	d^2
46	58	+6	+8	+2	36	64	4
46	41	+6	—9	—15	36	81	225
38	21	—2	—29	—27	4	841	729
35	18	—5	—32	—27	25	1024	729
35	32	—5	—18	—13	25	324	169
39	50	—1	0	+1	1	0	1
30	47	—10	—3	+7	100	9	49
51	86	+11	+36	+25	121	1296	625
50	73	+10	+23	+13	100	529	169
30	53	—10	+3	+13	100	9	169
41	71	+1	+21	+20	1	441	400
47	73	+7	+23	+16	49	529	256
33	23	—7	—27	—20	49	729	400
41	49	+1	—1	—2	1	1	4
43	55	+3	+5	+2	9	25	4
35	37	—5	—13	—8	25	169	64
54	85	+14	+35	+21	196	1225	441
47	76	+7	+26	+19	49	676	361
35	41	—5	—9	—4	25	81	16
44	62	+4	+12	+8	16	144	64
		+20	+51	+31	968	8197	4879
		U	V	D	Σu^2	Σv^2	Σd^2

Kontrola: $(+51) - (+20) = +31$

$$x_0 = 40; \quad y_0 = 50; \quad M_x = 40 + \frac{+20}{20} = 41; \quad M_y = 50 + \frac{+51}{20} = 52{,}55;$$

$$K_x = 968 - \frac{(+20)^2}{20} = 948; \quad K_y = 8197 - \frac{(+51)^2}{20} = 8066{,}95;$$

$$K_d = 4879 - \frac{(+31)^2}{20} = 4830{,}95; \quad K_{xy} = {}^1/_2\,(948 + 8066{,}95 - 4830{,}95) = 2092;$$

Vidimo, da smo dobili osnovne rezultate M_x, M_y, K_x, K_y in K_{xy} enake kot pri metodi pomožnih znakov u in v. Zaradi tega nadaljnjega računa ne bomo nakazovali, ker je popolnoma enak kot pri prejšnjem načinu in dobimo iste rezultate: $b_1 = 2{,}21$; $r_{xy} = 0{,}757$; $\sigma_e = 13{,}14$.

61.3 **Izračunavanje pokazateljev linearne korelacije iz grupiranih podatkov**

61.31 Korelacijska tabela. Če je populacija, ki jo proučujemo, obsežna, dosedanji načini izračunavanja pokazateljev korelacije niso prikladni. V tem primeru, podobno kot za en znak sestavimo frekvenčno distribucijo, uredimo dvojice podatkov v kombinacijski tabeli. Ker taka tabela prikazuje povezanost med dvema znakoma, jo imenujemo korelacijsko tabelo. Korelacijsko tabelo sestavimo tako, da za oba korelirana znaka tvorimo razrede z enakimi razrednimi intervali, v posamezna polja pa vpišemo frekvence, ki povedo, koliko enot ima vrednost znaka v določenem razredu po enem in drugem znaku. Iz korelacijskega grafikona, v katerem so vrednosti za posamezne enote vrisane kot točke, dobimo korelacijsko tabelo tako, da koordinatno ravnino razdelimo po abscisi in ordinati v pasove. Ti pasovi razdele koordinatno ravnino v pravokotnike — polja, število točk v posameznih poljih pa so frekvence. Korelacijsko tabelo moremo sestaviti bodisi po metodi črtkanja ali po metodi odlaganja listkov.

Primer 54. Ena izmed metod ugotavljanja zanesljivosti testa je metoda enakovrednih polovic. Test je običajno sestavljen iz niza nalog, ki so razvrščene po težavnosti. Zanesljivost testa v tem primeru merimo s korelacijo med dosežki pri lihih in sodih nalogah po vrstnem redu. Prvo skupino nalog predstavljajo naloge z zaporedno številko 1, 3, 5 ..., drugo pa naloge z zaporedno številko 2, 4, 6 ... Več o tem bomo govorili v poglavju o testnih normah.

Za testiranje presojanja mehanskih odnosov za 414 dijakov nižjih razredov gimnazij v Ljubljani je korelacijska tabela med dosežki pri lihih in sodih nalogah prikazana v tabeli 30.

Tabela 30. Korelacijska tabela dosežkov pri lihih in sodih nalogah pri testu mehanskega presojanja 414 dijakov v Ljubljani

Lihi y \ Sodi x	11 do 13	14 do 16	17 do 19	20 do 22	23 do 25	26 do 28	29 do 31	32 do 34	35 do 37	38 do 40	Σ
38 do 40	—	—	—	—	—	—	1	—	1	—	2
35 do 37	—	—	—	—	—	2	6	12	8	—	28
32 do 34	—	—	—	—	4	11	19	30	9	1	74
29 do 31	—	—	—	—	10	36	38	15	4	1	104
26 do 28	—	—	2	10	17	30	24	9	1	—	93
23 do 25	—	—	2	5	26	20	11	3	—	—	67
20 do 22	1	—	5	11	8	10	—	—	—	—	35
17 do 19	—	1	2	4	—	—	—	—	—	—	7
14 do 16	—	—	1	2	—	—	—	—	—	—	3
11 do 13	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
Σ	2	1	12	32	65	109	99	69	23	2	414

Frekvenca 10 v razredu 29 do 31 točk za lihe in 23 do 25 za sode naloge pove, da je od skupno 414 dijakov 10 takih, ki so pri lihih nalogah dosegli 29 do 31 točk, pri sodih pa 23 do 25 točk. Korelacijska tabela namreč ne prikazuje točne vrednosti enot za posamezne enote, temveč enako kot frekvenčna distribucija enači vse enote znotraj polja. Vsem enotam enega polja pripišemo vrednosti sredin ustrezajočih razredov. V primeru našega razreda je to: $x = 24$, $y = 30$. Čim večji so razredi, tem bolj je korelacijska tabela nenatančna. Prednost korelacijske tabele je v tem, da nazorno, v skrčeni obliki poda veliko maso dvojic vrednosti. Iz tabele 30 je namreč zelo dobro vidna velika pozitivna korelacija med dosežki sodih in lihih nalog. To vidimo iz tega, ker se frekvence vlečejo iz levega spodnjega kota proti desnemu zgornjemu kotu korelacijske tabele. Pri točnejšem proučevanju te tabele opazimo, da so kot na nekem grebenu frekvence največje, od tega grebena pa se na vse strani manjšajo. Ta oblika je za korelacijsko povezanost tipična.

Korelacijska tabela podaja v urejeni obliki zaokrožene vrednosti dvojic xy za vse enote populacije. Zaradi tega obstaja možnost, da iz nje izračunamo ocene pokazateljev linearne korelacije. Te ocene so dobri približki pravih rezultatov, ki bi jih z velikim tehničnim poslom dobili iz negrupiranih podatkov. Navedli bomo dve metodi izračunavanja pokazateljev linearne korelacije iz grupiranih podatkov: a) metodo pomožnih znakov u in v, b) metodo kumulativ.

61.32 Metoda pomožnih znakov u in v. Metoda pomožnih znakov u in v je po svojem principu zelo podobna izračunavanju variance iz frekvenčne distribucije. Postopek pa je naslednji:

a) Korelacijsko tabelo vpišemo tako, da tečejo razredi znaka y po velikosti od spodaj navzgor, razredi znaka x pa od leve proti desni (glej tab. 30!).

b) Za grupna znaka x in y, pripišemo razredoma, ki stojita nekje v sredini, vrednost 0, od te pa navzdol —1, —2, —3, ..., navzgor pa +1, +2, +3, ... To sta znaka u za x in v za y.

c) Obe robni frekvenčni distribuciji f_u in f_v enako kot pri izračunavanju variance pomnožimo z u in u^2 oziroma drugo z v in v^2.

d) Vsote izračunanih produktov po vrstah oziroma kolonah dajo količine

$$\Sigma f_u u = U; \quad \Sigma f_v v = V; \quad \Sigma f_u u^2, \; \Sigma f_v v^2$$

e) Frekvence posamezne vrste f_{uv} (za določen v) pomnožimo z ustrezajočimi vrednostmi u, vsoto teh produktov za posamezno vrsto ($\Sigma f_{uv} \cdot u = U_v$) pa vpisujemo v ustrezajoče vrste v posebno kolono.

Kontrola: vsota te kolone je enaka U; $\Sigma U_v = U$

f) Posamezne vrednosti v koloni (U_v) pomnožimo z ustrezajočo vrednostjo v, produkte $(U_v)\,v$ vpišemo v posebno kolono in te produkte seštejemo. Tako dobimo $\sum \Sigma f_{uv} uv$.

g) Iz teh količin izračunamo naslednje izraze:

$$M_x = x_0 + i_x \frac{U}{N}; \quad M_y = y_0 + i_y \frac{V}{N} \tag{77}$$

$$K_u = \Sigma f_u u^2 - \frac{U^2}{N}; \quad K_v = \Sigma f_v v^2 - \frac{V^2}{N}; \quad K_{uv} = \sum \Sigma f_{uv} uv - \frac{U \cdot V}{N} \tag{78}$$

Pri tem pomeni poleg znanih izrazov: x_0 = sredina razreda x, v katerega smo postavili $u = o$, y_0 = sredina razreda y, v katerega smo postavili $v = 0$, i_x in i_y pa sta razredna intervala znakov x in y.

h) Iz teh izrazov dobimo pokazatelje linearne korelacije po obrazcih

$$b_1 = \frac{i_y}{i_x} \cdot \frac{K_{uv}}{K_u}; \quad y' = M_y + b_1 (x - M_x) \tag{79}$$

$$\sigma_y^2 = i_y^2 \frac{K_v}{N}; \quad r_{xy} = \frac{K_{uv}}{\sqrt{K_u K_v}}; \quad \sigma_e = \sigma_y \sqrt{1 - r_{xy}^2} \tag{80}$$

Primer 55. Za podatke iz tabele 30 je po tej metodi izračunavanje pokazateljev korelacije naslednje:

12
21/33:2
16'5

Tabela 31. Izračunavanje pokazateljev linearne korelacije po metodi pomožnih znakov u in v za korelacijsko tabelo lihih in sodih rezultatov testiranja mehanskih odnosov 414 dijakov ljubljanskih šol

y Lihi	Sodi x	11 do 13	14 do 16	17 do 19	20 do 22	23 do 25	26 do 28	29 do 31	32 do 34	35 do 37	38 do 40					
	v \ u	—5	—4	—3	—2	—1	0	+1	+2	+3	+4	f_v	$f_v v$	$f_v v^2$	$(\Sigma f_{uv} u)$	$(\Sigma f_{uv} u)v$
38 do 40	+4							1		1		2	+8	32	+4	+16
35 do 37	+3						2	6	12	8		28	+84	252	+54	+162
32 do 34	+2					4	11	19	30	9	1	74	+148	296	+106	+212
29 do 31	+1					10	36	38	15	4	1	104	+104	104	+74	+74
26 do 28	0			2	10	17	30	24	9	1		93	0	0	+2	+0
23 do 25	—1			2	5	26	20	11	3			67	—67	67	—25	+25
20 do 22	—2	1		5	11	8	10					35	—70	140	—50	+100
17 do 19	—3		1	2	4							7	—21	63	—18	+54
14 do 16	—4			1	2							3	—12	48	—7	+28
11 do 13	—5	1										1	—5	25	—5	+25
		0	2	1	1	3	3	4	4	5	6					
	f_u	2	1	12	32	65	109	99	69	23	2	414	+169	1027	+135	+696
													V	$\Sigma f_v v^2$	U	$\Sigma f_{uv} uv$
	$f_u u$	10	4	36	64	65	0	99	138	69	8	+135	U			
	$f_u u^2$	50	16	108	128	65	0	99	276	207	32	981	$\Sigma f_u u^2$			

Iz teh podatkov dobimo s pomočjo obrazcev 77 in 78

$$M_x = 27 + 3\,\frac{+135}{414} = 27{,}98; \quad M_y = 27 + 3\,\frac{+169}{414} = 28{,}22;$$

$$K_u = 981 - \frac{(+135)^2}{414} = 936{,}98; \quad K_v = 1027 - \frac{(+169)^2}{414} = 958{,}01;$$

$$K_{uv} = +696 - \frac{(+135)\cdot(+169)}{414} = +640{,}89$$

S pomočjo obrazcev 79 in 80 dobimo dalje končne rezultate:

$$b_1 = \frac{3}{3}\cdot\frac{+640{,}89}{958{,}01} = +0{,}669; \quad y' = 28{,}22 + 0{,}669\,(x - 27{,}98);$$

$$\sigma_y^2 = \frac{3^2\cdot 958{,}01}{414} = 20{,}82; \quad r_{xy} = \frac{+640{,}89}{\sqrt{936{,}98\cdot 958{,}01}} = 0{,}677;$$

$$\sigma_e = 4{,}56\sqrt{1 - 0{,}677^2} = 3{,}40$$

61.33 Metoda kumulativ. Lastnosti kumulativ, ki smo jih izkoristili pri izračunavanju varianc iz grupiranih podatkov, moremo s pridom uporabiti tudi pri izračunavanju pokazateljev korelacije iz grupiranih podatkov. Postopek po metodi kumulativ je naslednji:

a) Korelacijska tabela mora biti vpisana tako, da grupe x rastejo od leve proti desni, grupe y pa od spodaj navzgor. Robne frekvenčne distribucije imamo vpisane v korelacijski tabeli.

b) Poleg robnih frekvenčnih distribucij f_x in f_y izračunamo še diagonalno frekvenčno distribucijo f_d. Diagonalno frekvenčno distribucijo f_d dobimo tako, da seštevamo frekvence korelacijske tabele v smeri diagonale korelacijske tabele. Prvi člen diagonalne serije je vsota vseh frekvenc prve linije v smeri diagonale, če začnemo v zgornjem levem kotu. Drugi člen je vsota vseh frekvenc naslednje diagonalne linije in tako dalje. To seštevanje nadaljujemo toliko časa, dokler ne seštejemo frekvence vseh diagonalnih linij in dobimo vse člene serije f_d. Formiranje diagonalne serije f_d iz korelacijske tabele je nakazano v primeru 56 s puščicami v smeri seštevanja.

c) Iz vseh treh distribucij f_x, f_y in f_d na znan način dvojnega kumuliranja iz distribucije f_x izračunamo A_x in B_x, iz distribucije f_y A_y in B_y in iz distribucije f_d A_d in B_d.

Prva kontrola: Zadnji člen prvih kumulativ F_x, F_y in F_d je enak številu enot populacije N.

Druga kontrola:

$$A_x - A_y + A_d = (r-1)N \tag{81}$$

Poleg znanih količin pomeni: r = kolona, v kateri preseka zadnja diagonalna linija spodnji rob korelacijske tabele (glej primer 56!).

Opomba: Ako seštevamo na stroj, adiator ali računalo, moremo pri gornjem postopku eno stopnjo preskočiti. Pri seštevanju frekvenc dobimo namreč z uporabo delnih vsot (subtotalov) prve kumulative za vse tri serije (F_x, F_y in F_d) neposredno brez predhodnega izračunavanja f_x, f_y in f_d.

d) Iz dobljenih vrednosti kumulativ izračunamo pomožne količine

$$K_x = 2B_x + A_x - \frac{A_x^2}{N}; \quad K_y = 2B_y + A_y - \frac{A_y^2}{N}; \quad K_d = 2B_d + A_d - \frac{A_d^2}{N} \tag{82}$$

$$K_{xy} = 1/2\,(K_x + K_y - K_d); \quad M_x = x_0 + i_x\frac{A_x}{N}; \quad M_y = y_0 + i_y\frac{A_y}{N} \tag{83}$$

x_0 = sredina najnižjega razreda x, y_0 = sredina najnižjega razreda y.

e) Iz teh izrazov dobimo pokazatelje linearne korelacije po istih obrazcih kot pri prejšnji metodi.

$$b_1 = \frac{i_y}{i_x}\cdot\frac{K_{xy}}{K_x}; \quad y' = M_y + b_1(x - M_x) \tag{84}$$

$$\sigma_y^2 = i_y^2\frac{K_y}{N}; \quad r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sqrt{K_x K_y}}; \quad \sigma_e = \sigma_y\sqrt{1 - r_{xy}^2} \tag{85}$$

Primer 56. Za podatke iz tabele 30 je izračunavanje pokazateljev linearne korelacije po metodi kumulativ naslednje:

V tabeli 32 je nakazan proces formiranja distribucije f_d in izračunavanja vseh kumulativ.

Prva diagonalna frekvenca je torej:

$$1 + 2 + 4 + 2 + 1 = 10;$$

druga: $6 + 11 + 10 + 10 + 1 = 39$ itd.

zadnja: $3 + 1 + 1 = 5$

Prva kontrola pokaže pravilnost računa do izračuna prve kumulative, ker smo kot zadnji člen prve kumulative pri vseh treh serijah dobili $N = 414$. Druga kontrola, ki naj pokaže pravilnost izračunavanja drugih kumulativ, je naslednja. V tabeli 32

Tabela 32. Izračunavanje pokazateljev linearne korelacije po metodi kumulativ za korelacijsko tabelo lihih in sodih rezultatov testiranja mehanskih odnosov 414 dijakov ljubljanskih gimnazij

Sodi x / y Lihi	11 do 13	14 do 16	17 do 19	20 do 22	23 do 25	26 do 28	29 do 31	32 do 34	35 do 37	38 do 40		f_y	F_y	FF_y	f_d	F_d	FF_d
								10		**96**							
38 do 40							1		1			2			10		
35 do 37						2	6	12	8	**81**		28	2		39	10	
32 do 34					4	11	19	30	9	1	**5**	74	30	9	96	49	10
29 do 31				·	10	36	38	15	4	1		104	104	32	146	145	59
26 do 28			2	10	17	30	24	9	1			93	208	136	81	291	204
23 do 25		·	2	5	26	20	11	3				67	301	344	37	372	495
20 do 22	1	·	5	11	8	10	·					35	368	645	5	409	867
17 do 19	**39**	1	2	4	·	·						7	403	1013	414	1276	1635
14 do 16	·	·	1	2	·							3	410	1416	N	A_d	B_d
11 do 13	1	·	·	·								1	413	1826			
	146		**37**		$r = 4$												
	2	1	12	32	65	109	99	69	23	2		f_x	414	2239	5414		
N 414	412	411	399	367	302	193	94	25	2			F_x	N	A_y	B_y		
A_x 2205	1793	1382	983	616	314	121	27	2				FF_x					
B_x 5238																	

je nakazana zadnja diagonalna linija, ki seka spodnji rob korelacijske tabele v četrti koloni. r je torej 4. Iz obrazca 81 sledi:

$$2205 - 2239 + 1276 = 1242 = (4 - 1)\,414$$

Kontrola je pokazala pravilnost izračuna druge kumulative vseh treh distribucij hkrati.

S pomočjo obrazcev 82 in 83 dobimo:

$$K_x = 2 \cdot 5238 + 2205 - \frac{2205^2}{414} = 936{,}98; \quad K_y = 2 \cdot 5414 + 2239 - \frac{2239^2}{414} = 958{,}01$$

$$K_a = 2 \cdot 1635 + 1276 - \frac{1276^2}{414} = 613{,}21; \quad K_{xy} = {}^1/_2\,(936{,}98 + 958{,}01 - 613{,}21) =$$

$$= 640{,}89$$

$$M_x = 12 + 3\,\frac{2205}{414} = 27{,}98; \quad M_y = 12 + 3\,\frac{2239}{414} = 28{,}22$$

Primerjava teh količin pokaže skladnost z rezultati, ki smo jih dobili z metodo pomožnih znakov u in v. Zaradi tega končnega izračuna pokazateljev korelacije ne bomo navedli, ker je enak prejšnjemu. Rezultati so:

$$b_1 = +0{,}669; \quad y' = 28{,}22 + 0{,}669\,(x - 27{,}98); \quad r_{xy} = +0{,}677; \quad \sigma_e = 3{,}40$$

Primer je pokazal, da je metoda kumulativ preglednejša in krajša, posebno če računamo s strojem ali drugim pomožnim sredstvom.

62. **Biserialni korelacijski koeficient**

62.0 **Problem**

Korelacijski koeficient r_{xy} moremo izračunavati le, kadar sta korelirana znaka numerična, njihove vrednosti pa dane vsaj grupno. Pri tem se zavedamo, da je korelacijski koeficient, izračunan iz grupiranih podatkov, tem manj zanesljiv, čim večje so grupe. Pri majhnem številu grup pa izračunavanje korelacijskega koeficienta po tej metodi izgubi svojo praktično vrednost. Vendar ga moremo oceniti tudi v primeru, da je po enem znaku število grup reducirano samo na dve grupi, če populacija izpolnjuje določene predpostavke. V tem primeru uporabljamo *biserialni korelacijski koeficient*, katerega izračunavanje je upravičeno, če je tudi znak, katerega vrednosti so dane v alternativnih dveh grupah, numeričen in distribuiran vsaj približno normalno, odvisnost med obema pa linearna. Poleg tega je v dobro kvalitete ocene, če obe alternativni grupi po številu enot nista preveč različni.

Problemov, ki narekujejo uporabo biserialnega korelacijskega koeficienta, je v praksi veliko. Dostikrat so pri korelacijski analizi podatki za en znak pomanjkljivi ali nezanesljivi, ali pa ima korelacijska tabela po enem znaku odprte razrede itd. V teh primerih je Pearsonov korelacijski koeficient r_{xy} nemogoče izračunati. S pomočjo grupiranja podatkov po tem znaku v dve grupi pa ga je mogoče oceniti z biserialnim korelacijskim koeficientom. Dostikrat je tudi znak, čeprav v svoji osnovi numeričen, registriran kot atribut. Tako je na primer atribut: uspeh pri izpitu: opravil — padel v svoji osnovi numeričen znak, merjen z obsegom znanja. Določena stopnja znanja pa je meja med: opravil — padel. Tudi osnovna predpostavka, da je stopnja znanja normalno razporejena, je sprejemljiva, ker imamo običajno večino povprečnih študentov, odkloni od tega povprečja pa so tem redkejši, čim večji so odkloni bodisi v eno ali drugo smer. Z biserialnim koeficientom korelacije bi mogli pri tem problemu meriti odvisnost med časom, ki ga je študent porabil za pripravo (ta znak dan numerično), in znanjem (ta znak dan alternativno z uspehom pri izpitu). Podobne narave je tudi znak soglasnost: se strinja — se ne strinja. Tudi ta znak ima numeričen koren, čeprav je stopnjo soglasnosti teže izmeriti in more zaradi tega rabiti kot osnova za izračunavanje biserialnega korelacijskega koeficienta.

62.1 **Izračunavanje r_{bi} iz negrupiranih podatkov**

Če imamo dane individualne vrednosti numeričnega znaka in grupne vrednosti atributivnega — alternativnega znaka, izračunamo r_{bi} po naslednjem postopku:

a) Podatke numeričnega znaka y grupiramo po vrednosti alternativnega znaka v dve grupi.

b) Izračunamo aritmetični sredini numeričnega znaka y v prvi in drugi grupi: M_p in M_q.

c) Izračunamo standardni odklon znaka y za celotno populacijo σ_t.

d) Po obrazcih 86 izračunamo strukturni delež enot v prvi in drugi grupi.

$$p = \frac{N_p}{N}; \quad q = 1 - p \tag{86}$$

e) V tablicah normalne distribucije poiščemo k $F = p - 0{,}5$ ustrezajočo vrednost ordinate y.

f) Biserialni korelacijski koeficient izračunamo iz dobljenih količin po obrazcu

$$r_{bi} = \frac{M_q - M_p}{\sigma_t} \cdot \frac{p \cdot q}{y} \tag{87}$$

Primer 57. Kot primer vzemimo podatke o rezultatih mehanskega in spacialnega testa 20 dijakov klasične gimnazije v Mariboru iz tabele 26. Podatke preuredimo tako, da grupiramo rezultate mehanskega testa v alternativi: dosegel 45 točk in manj in dosegel 46 in več. Prvo grupo zaznamujmo z a, drugo pa z b! Podatki iz tabele 26, pisani s to modifikacijo, so takile:

Tabela 33. Rezultati testiranja zmožnosti presojanja mehanskih (x : a = 45 točk in manj, b = 46 točk in več) in spacialnih (y) odnosov dvajsetih tretješolcev klasične gimnazije v Mariboru

Zap. št.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x..........	b	b	a	a	a	a	b	b	a	a	b	a	a	a	a	b	b	a	a	
y..........	58	41	21	18	32	50	47	86	73	53	71	73	23	49	55	37	85	76	41	62

Iz teh podatkov dobimo:

$N = 20;$

$N_p = N = 13 \quad \Sigma y_a = 559; \quad p = 13/20 = 0{,}65; \quad M_p = 559/13 \doteq 43{,}0$

$N_q = N_b = 7; \quad \Sigma y_b = 492; \quad q = 1 - 0{,}65 = 0{,}35; \quad M_q = 492/7 = 70{,}3$

Iz tablic normalne distribucije dobimo:

$y = y\,(F = 0{,}65 - 0{,}5 = 0{,}15) = 0{,}370$, a iz primera 52 $\sigma_t = 20{,}1$

Iz teh podatkov dobimo biserialni korelacijski koeficient po obrazcu

$$r_{bi} = \frac{70{,}3 - 43{,}0}{20{,}1} \cdot \frac{0{,}65 \cdot 0{,}35}{0{,}370} = 0{,}835$$

Pearsonov korelacijski koeficient za iste podatke smo dobili $r_{xy} = 0{,}757$. Če upoštevamo majhno populacijo, razlika med obema ni velika.

62.2 Izračunavanje r_{bi} iz grupiranih podatkov

Za večje populacije je numeričen znak običajno dan v dveh frekvenčnih distribucijah, za vsako grupo alternativnega znaka po eno. V tem primeru računamo biserialni korelacijski koeficient r_{bi} po naslednjih stopnjah:

a) Dani imamo frekvenčni distribuciji f_p in f_q za obe grupi alternativnega znaka in skupno frekvenčno distribucijo f.

b) Po znanem postopku kumuliranja izračunamo za serijo f_p količino A_p, za sumarno distribucijo f pa A in B.

c) Izračunamo strukturni delež enot v prvi grupi $p = N_p/N$ in poiščemo v tablicah normalne distribucije k $F = p - 0{,}5$ ustrezajočo ordinato y.

Biserialni korelacijski koeficient r_{bi} izračunamo iz teh količin po obrazcu

$$r_{bi} = \frac{A \cdot p - A_p}{y\sqrt{N(2B + A) - A^2}} \tag{88}$$

Primer 58. Kot primer izračunavanja r_{bi} preuredimo podatke iz tabele 30 tako, da bodo dosežki pri sodih nalogah razdeljeni v dve grupi: p: 28 in manj točk in q: 29 in več točk.

Tabela 34. Izračunavanje r_{bi} dosežkov pri lihih in sodih nalogah pri testu mehanskega presojanja 414 ljubljanskih dijakov

Sodi	—28		29—	Skupaj		
Lihi	f_p	F_p	f_q	f	F	FF
38 do 40			2	2		
35 do 37	2		26	28	2	
32 do 34	15	2	59	74	30	2
29 do 31	46	17	58	104	104	32
26 do 28	59	63	34	93	208	136
23 do 25	53	122	14	67	301	344
20 do 22	35	175		35	368	645
17 do 19	7	210		7	403	1013
14 do 16	3	217		3	410	1416
11 do 13	1	220		1	413	1826
	$N_p =$	221	193	$N = 414$		$2239 = A$
	$A_p =$	1026				$5414 = B$

Iz rezultatov tabele 34 dobimo po obrazcu 88

$$p = 221/414 = 0{,}534$$

$$y\,(F = 0{,}534 - 0{,}5 = 0{,}034) = 0{,}3975$$

$$r_{bi} = \frac{2239 \cdot 0{,}534 - 1026}{0{,}3975\,\sqrt{414\,(2 \cdot 5414 + 2239) - 2239^2}} = +0{,}667$$

Rezultat $r_{bi} = +0{,}667$ se slučajno s Pearsonovim korelacijskim koeficientom $r_{xy} = +0{,}677$ presenetljivo sklada.

63. Tetrakorični korelacijski koeficient

Če ni samo eden, temveč sta oba korelirana znaka z numerično osnovo grupirana v alternativi, moremo v primeru, da predpostavljamo, da sta oba znaka normalno razporejena in linearno odvisna, izračunavati *tetrakorični korelacijski koeficient.* Ta koeficient je v primeru, da zgornje predpostavke veljajo, dober približek Pearsonovega koeficienta r_{xy}. V primeru take razdelitve populacije je korelacijska tabela taka kot v tabeli 34.

Tabela 34. Tetrakorična frekvenčna tabela

y \ x	x_1	x_2	
y_1	a	b	$a + b$
y_2	c	d	$c + d$
	$a + c$	$b + d$	N

Obrazcev za ocenjevanje tetrakoričnega korelacijskega koeficienta je več. Navajamo samo obrazec *cosinus pi*, ki je od vseh najenostavnejši, če razpolagamo s tablicami trigonometričnih funkcij. Izračun po tem načinu je razviden iz obrazca

$$r_t = \cos\left(180^0 \frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{ad} + \sqrt{bc}}\right) \tag{89}$$

a, b, c in d so frekvence v posameznih poljih štiripoljne tabele 34.

Primer 59. Kot primer smo zgrupirali podatke iz korelacijske tabele 30 po znaku x in y v grupi: do 28 točk in manj in 29 točk in več.

Tabela 35. Izračunavanje tetrakoričnega korelacijskega koeficienta r_t za dosežke pri sodih in lihih nalogah pri testu mehanskega presojanja 414 ljubljanskih dijakov

Lihi \ Sodi	—28	29—	Σ
—28	158	48	206
29—	63	145	208
Σ	221	193	414

$$r_t = \cos\left(180^0 \frac{\sqrt{48 \cdot 63}}{\sqrt{158 \cdot 145} + \sqrt{48 \cdot 63}}\right) = \cos 48^0 = 0{,}669$$

Tudi ta ocena se presenetljivo sklada s Pearsonovim korelacijskim koeficientom r_{xy} za isto populacijo.

S tetrakoričnim korelacijskim koeficientom moremo ocenjevati korelacijo ne samo numeričnih podatkov, ki jih z grupiranjem privedemo v štiripoljno tabelo, temveč korelacijo med najrazličnejšimi — na prvi pogled nenumeričnimi in celo abstraktnimi — pojavi. Z r_t moremo meriti korelacijo med pridnostjo in uspehom, državljansko zavestjo in mnenjem o določenem ukrepu države in tako dalje.

64. Korelacijsko razmerje

64.0 Problem

Vse dosedanje metode merjenja odvisnosti so bile vezane na pogoj, da sta korelirana znaka numerična ali da imata vsaj numerično osnovo. Vendar moremo že z enostavnim primerom spoznati, da obstaja korelacijska zveza tudi med atributivnimi znaki. Zmožnost presojanja mehanskih odnosov je na primer odvisna od spola, ki je atributiven znak. Enako so povezane določene zmožnosti delavcev z njihovimi poklici itd. V teh primerih obravnavanih metod ne moremo uporabiti, ker je en znak numeričen, drug pa atributiven (n. pr. testni rezultat — spol).

Moremo pa meriti povezanost in odvisnost numeričnega in atributivnega znaka s *korelacijskim razmerjem*. Korelacijsko razmerje moremo izračunavati v vseh primerih, če je le vsaj eden izmed znakov numeričen, drugi pa je lahko numeričen ali atributiven. Enako ni pogoj za izračunavanje korelacijskega razmerja linearna povezava med znakoma, kot je to pogoj pri r_{xy}, r_{bi} in r_t. Področje proučevanja korelacije se s korelacijskim razmerjem znatno razširi.

Korelacijsko razmerje je po svoji osnovi indeks korelacije, pri čemer vzamemo kot regresijsko funkcijo serijo grupnih sredin (glej odstavek 60.322 in 60.4!). Ta postopek da indeks korelacije krivuljčne regresije maksimalne povezanosti. Ker pa moremo tvoriti grupe in izračunavati grupne sredine tudi, če so podatki grupirani po atributivnem znaku, ta metoda ni vezana samo na numerične znake.

Korelacijsko razmerje, ki ga na splošno zaznamujemo z η^2 (eta kvadrat), pove, koliki del skupne variance y izvira iz razlik med aritmetičnimi sredinami grup, torej iz odvisnosti od grupnega znaka. Korelacijsko razmerje moremo računati iz grupiranih in negrupiranih podatkov.

64.1 Izračunavanje η^2 iz negrupiranih podatkov

Iz negrupiranih podatkov izračunamo korelacijsko razmerje η^2 najracionalneje takole:

a) Podatke numeričnega znaka y zberemo po grupah koreliranega znaka (numeričnega ali atributivnega).

b) Seštejemo podatke y po posameznih grupah. Dobimo Y_k. Grupne vsote Y_k seštejemo v skupno vsoto $Y = \Sigma Y_k$.

c) Vse individualne podatke y in pod b dobljene vsote Y_k in Y kvadriramo.

d) Kvadrate vsot Y_k^2 in Y^2 delimo s številom enot N_k in N v ustrezajočih grupah. Dobimo Y_k^2/N_k in $Y^2/N = Q$.

e) Seštejemo kvadrate vseh individualnih podatkov za celo populacijo. Tako dobimo $\Sigma y^2 = Q_{ki}$.

f) Seštejemo izraze Y_k^2/N_k za vse grupe. Dobimo $\Sigma Y_k^2/N_k = Q_k$.

g) Iz teh količin dobimo korelacijsko razmerje po obrazcu

$$\eta_{xy}^2 = \frac{Q_k - Q}{Q_{ki} - Q} \tag{90}$$

Opomba: Če se vrednosti celotne populacije vrte okrog neke določene vrednosti y_0, moremo originalne vrednosti y za to vrednost zmanjšati. Tako dobimo namesto originalnih vrednosti $y - y_0 = v$. Vrednost korelacijskega razmerja se ne izpremeni, če po zgornjem postopku računamo z v namesto z y.

Primer 60. Kot primer vzemimo odvisnost zmožnosti mehanskega presojanja od spola. Podatki so vzeti iz gradiva DAT testiranja za četrtošolce VIII. gimnazije v Ljubljani.

Tabela 36. Izračunavanje korelacijskega razmerja zmožnosti mehanskega presojanja v odvisnosti od spola (DAT Ljubljana)

Dečki						Deklice							
y	y^2	y	y^2	y	y^2	y	y^2	y	y^2	y	y^2	y	y^2
56	3136	44	1936	32	1024	17	289	8	64	25	625	21	441
50	2500	38	1444	31	961	27	729	28	784	38	1444	8	64
55	3025	52	2704	42	1764	13	169	18	324	16	196	21	441
49	2401	40	1600	55	3025	37	1369	26	676	20	400	27	729
$N_1 = 12$		$Y_1 = 544$				$N_2 = 16$		$Y_2 = 350$					

$N = 12 + 16 = 28; \quad Y = 544 + 350 = 894$

$\Sigma y^2 = 3136 + \ldots + 729 = 34264 = Q_{ki}$

Iz teh podatkov dalje dobimo:

$Q_k = Y_1^2/N_1 + Y_2^2/N_2 = 544^2/12 + 350^2/16 = 32317{,}69$

$Q = Y^2/N = 894^2/28 = 28544{,}14$

Če vstavimo te podatke v obrazec 90, dobimo

$$\eta_{xy}^2 = \frac{32317{,}69 - 28544{,}14}{34264{,}00 - 28544{,}14} = 0{,}66$$

64.2 Izračunavanje η^2 iz frekvenčnih distribucij

Če so vrednosti numeričnega znaka grupirane v frekvenčnih distribucijah, izračunamo korelacijsko razmerje η^2 po naslednjih stopnjah:

a) Imamo frekvenčne distribucije numeričnega znaka za posamezne grupe f_k in sumarno frekvenčno distribucijo f. Grupe z minimalnim številom enot združimo s sorodnimi grupami.

b) Za vsako grupno frekvenčno distribucijo izračunamo s kumuliranjem količine A_k, za sumarno pa A in B. Kontrola: $\Sigma A_k = A$.

c) Iz tako dobljenih količin N, A in B, N_k in A_k izračunamo korelacijsko razmerje po obrazcu

$$\frac{\Sigma A_k^2/N_k - A^2/N}{2B + A - A^2/N} = \eta^2 \tag{91}$$

Če je populacija razdeljena samo v dve grupi, se korelacijsko razmerje, izračunano po obrazcih 90 in 91, sklada z determinacijskim koeficientom linearne korelacije, pri čemer vzamemo, da so vrednosti ene grupe 0, druge pa 1. Ta korelacija je znana pod imenom *točkovno-biserialna korelacija.*

Primer 61. Za podatke iz korelacijske tabele 30 je treba izračunati korelacijsko razmerje. Pri tem smatramo sode naloge kot grupe.

Kontrola: $\Sigma A_k = 43 + 113 + \ldots + 453 + 178 = 2239 = A$

$$\Sigma A_k^2/N_k = 123{,}27 + 399{,}03 + \ldots + 2974{,}04 + 1267{,}36 = 12549{,}28$$

$$\eta^2 = \frac{12549{,}28 - 12108{,}99}{2 \cdot 5414 + 2239 - 12108{,}99} = 0{,}459$$

Primerjava korelacijskega razmerja $\eta^2 = 0{,}459$ z determinacijskim koeficientom $r_{xy}^2 = 0{,}677^2 = 0{,}457$ pokaže, da je povezava med dosežki pri lihih in sodih nalogah linearna, ker je razlika med tema koeficientoma minimalna. Kot je vidno iz primera, smo v skladu s priporočilom v točki *a* postopka za izračunavanje η^2 robni frekvenčni distribuciji zaradi majhnega obsega združili s sosednima.

Prednost izračunavanja η^2 po zgornjem načinu je tudi v tem, da moremo po potrebi izračunati tudi grupne sredine, ki kažejo tip povezanosti. Grupne sredine moremo izračunati po obrazcu

$$M_k = y_0 + i_y \cdot A_k/N_k \tag{92}$$

pri čemer je y_0 sredina najnižjega razreda. Če gre samo za tendenco gibanja grupnih sredin, pa zadostuje, da izračunamo samo izraze $m_k = A_k/N_k$.

Tabela 36a. Izračunavanje η^2 za korelacijo med sodimi in lihimi rezultati testiranja mehanskih odnosov 414 dijakov ljubljanskih gimnazij

Lihi	Do 19		20 do 22		23 do 25		26 do 28		29 do 31		32 do 34		Nad 35		Skupaj		
Sodi	f_1	F_1	f_2	F_2	f_3	F_3	f_4	F_4	f_5	F_5	f_6	F_6	f_7	F_7	f	F	FF
38 do 40									1				1		2		
35 do 37							2		6	1	12		8	1	28	2	
32 do 34					4		11	2	19	7	30	12	10	9	74	30	2
29 do 31					10	4	36	13	38	26	15	42	5	19	104	104	32
26 do 28	2		10		17	14	30	49	24	64	9	57	1	24	93	208	136
23 do 25	2	2	5	10	26	31	20	79	11	88	3	66		25	67	301	344
20 do 22	6	4	11	15	8	57	10	99		99		69		25	35	368	645
17 do 19	3	10	4	26		65		109		99		69		25	7	403	1013
14 do 16	1	13	2	30		65		109		99		69		25	3	410	1416
11 do 13	1	14		32		65		109		99		69		25	1	413	1826
N_k		15		32		65		109		99		69		25	$N = 414$		$2239 = A$
A_k		43		113		301		569		582		453		178	$\Sigma A_k = 2239$		$5414 = B$
A_k^2		1849		12769		90601		323761		338724		205209		31684	$A^2 = 5013121$		
A_k^2/N_k		123,27		399,03		1393,86		2970,28		3421,45		2974,04		1267,36	$A^2/N = 12108,99$		

65. Korelacija ranga

V psiholoških raziskavah naletimo na vrsto znakov, ki so take narave, da se njih velikost bodisi ne da ali pa le z zelo zapletenimi načini izraziti numerično, čeprav so v osnovi numerični. Tak pojav je na primer: inteligenca, katere stopnjo je sicer možno z objektivnimi sredstvi testiranja meriti, vendar je ta procedura vezana na obsežno delo. Pedagog, ki razmeroma dolgo dela z določenim kolektivom, si o stopnji inteligence svojih dijakov ustvari sodbo, vendar mu je to stopnjo numerično nemogoče izraziti. Pač pa more po svoji sodbi dijake razvrstiti v rang glede na stopnjo inteligence, enako kot jih more razvrstiti po velikosti, čeprav ne pozna višine posameznega dijaka. Razvrstitev je tem lažja, čim večje so razlike med posamezniki in tem težja, čim manjše so razlike. Ako dijakom, razvrščenim po stopnji inteligence, koordiniramo zaporedno številko, ta zaporedna številka kot znak kaže stopnjo inteligence. Višja zaporedna številka namreč kaže na višjo stopnjo inteligence, razlika med rangi more rabiti kot mera razlik v inteligenci in tako dalje. To merilo ima sicer svoje hibe, od katerih je največja ta, da so razmaki rangov enaki, čeprav so razlike v stopnji inteligence od dijaka do dijaka verjetno različne.

Enako moremo razporediti dijake po drugih lastnostih: zanimanju za določen predmet, sposobnosti, tovarištvu itd., rang pa vzeti kot numerično merilo stopnje teh lastnosti.

Tako razširimo področje kvantitativnega proučevanja tudi na znake, ki ali niso numeričnega značaja ali pa je določanje numerične vrednosti pojava težka, imajo pa lastnost, da jih moremo razvrščati po rangu.

Ako prenesemo principe korelacijske analize na znake, katere smo karakterizirali z rangi, moremo zaključiti, da je med dvema pojavoma velika, da ne rečemo funkcionalna pozitivna povezava, če se rangi posameznih enot po enem in drugem znaku ujemajo. Korelacija pa je obratno negativna, če imajo enote, ki imajo visok rang po enem znaku nizek rang po drugem in obratno. Če vzamemo rang kot numeričen znak, moremo iz rangov za enote populacije, katere smo razvrstili po dveh znakih, izračunati korelacijski koeficient. Postopek izračunavanja *koeficienta korelacije ranga* ϱ je v primerjavi z izračunavanjem korelacijskega koeficienta r_{xy} znatno enostavnejši. Izračunavamo ga po naslednjem postopku:

a) Pripravimo si za vsako enoto populacije individualni obdelovalni listek.

b) Na vsak obdelovalni listek napišemo podatke koreliranih znakov za posamezno enoto. Ti podatki so bodisi numerični, če izračunavamo korelacijo ranga med numeričnimi znaki, ali imena oziroma oznake enot, če izračunavamo korelacijo ranga pojavov, za katere nimamo numerične vrednosti.

c) Listke razporedimo po rangu prvega koreliranega znaka, glede na velikost, če je znak numeričen, oziroma glede na poznavanje lastnosti kolektiva, če lastnost, ki jo proučujemo, ni numerično dana.

d) Obdelovalnim listkom, ki smo jih razporedili po rangu prvega znaka, vpišemo po vrsti rang po prvem znaku.

Če sta vrednosti dveh enot, ki ju razporejamo v rang, enaki, ali pa se pri nenumerični lastnosti za dve ali več enot ne moremo odločiti za vrstni red, vzamemo kot skupni rang vseh teh enot aritmetično sredino zaporednih števílk teh enot. Če sta to na primer peta in šesta enota po vrstnem redu, je skupni rang $^1/_2\,(5+6)=5{,}5$. Če je tak primer pri enajsti, dvanajsti in trinajsti enoti, je skupen rang $^1/_3\,(11+12+13)=12$.

e) Ko smo na obdelovalne listke vpisali range po prvem znaku, ravnamo enako z drugim znakom. Enote oziroma obdelovalne listke razvrstimo po velikosti drugega pojava; na urejene obdelovalne listke pa vpišemo rang po drugem znaku.

f) Za vsako enoto na posameznih obdelovalnih listkih izračunamo razliko obeh rangov, razliko rangov pa kvadriramo.

g) Seštejemo kvadrate diferenc rangov za vse enote. Tako dobimo Σd^2.

h) Iz vsote kvadratov diferenc rangov Σd^2 in števila enot populacije N dobimo koeficient korelacije ranga po Spearmanovem obrazcu

$$\varrho = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{N(N^2-1)} \tag{93}$$

Spearmanov koeficient korelacije ranga se obnese le za populacije z razmeroma majhnim številom enot. Razvrščanje enot po rangu je tem teže, čim večja je populacija, ker so razlike med zaporednimi enotami v tem primeru vedno manjše.

Izračunavanje korelacije ranga pa ne pride v poštev samo v primeru, da za proučevani pojav nimamo numeričnega izraza in ni druge možnosti proučevanja korelacije. S pridom jo moremo uporabiti tudi v primerih, če so korelirani znaki dani numerično, hočemo pa hitro in enostavno priti do orientacijskih podatkov o jakosti korelacije. Posebno je ta metoda prikladna za kompleksno analizo odvisnosti velikega števila pojavov, pri kateri iščemo korelacijske koeficiente vseh možnih kombinacij znakov. V tem primeru ravnamo v praksi tako, da na posamezen obdelovalni listek na način, ki je nakazan zgoraj, vpišemo range posamezne enote po vseh proučevanjih značilnosti populacije. Za vsako enoto izračunamo diference vseh možnih kombinacij po dva ranga, te diference kvadriramo, za posamezno dvojico pojavov za vse enote seštejemo kvadrate diferenc in po obrazcu 93 izračunamo vse možne korelacijske koeficiente. Tako je možno z enostavnim postopkom kompleksno analizirati korelacijo več pojavov hkrati.

S korelacijo ranga moremo reševati najrazličnejše probleme. Zmožnost objektivnega presojanja določenega ocenjevalca merimo s koeficientom korelacije ranga med subjektivno razvrstitvijo ocenjevalca in razvrstitvijo, ki smo jo dobili na objektiven način. Korelacijo med zanimanjem za dva predmeta ali korelacijo med zanimanjem za dve vrsti športnega udejstvovanja za določen manjši kolektiv more izračunati profesor ali športni trener, če le pozna ta kolektiv toliko, da more vsaj kolikor toliko objektivno razvrstiti člane kolektiva po rangu.

Primer 62. Kot primer izračunajmo koeficient korelacije ranga iz podatkov rezultatov testiranja zmožnosti presojanja mehanskih in spacialnih odnosov za 20 dijakov mariborske klasične gimnazije iz tabele 26.

V celoti izdelamo torej 20 obdelovalnih listkov. Na vsak listek napišemo podatka x in y za vsako enoto. Z razvrščanjem po znaku x dobimo rang za prvi, z razvrščanjem po znaku y pa rang za drugi znak. Poiščemo razlike rangov, te kvadriramo, seštejemo in vstavimo v obrazec 93. Postopek je prikazan v tabeli 37, v kateri vsaka vrsta ustreza enemu obdelovalnemu listku.

Tabela 37. Izračunavanje korelacije ranga med zmožnostjo presojanja mehanskih in spacialnih odnosov 20 dijakov mariborske klasične gimnazije (x = mehanski, y = spacialni)

x	y	R_x	R_y	d	d^2
30	53	1,5	11	9,5	90,25
30	47	1,5	8	6,5	42,25
33	23	3	3	0	0
35	37	5,5	5	0,5	0,25
35	32	5,5	4	1,5	2,25
35	41	5,5	6,5	1,0	1,00
35	18	5,5	1	4,5	20,25
38	21	8	2	6,0	36,00
39	50	9	10	1,0	1,00
41	49	10,5	9	1,5	2,25
41	71	10,5	15	4,5	20,25
43	55	12	12	0,0	0,00
44	62	13	14	1,0	1,00
46	41	14,5	6,5	8,0	64,00
46	58	14,5	13	1,5	2,25
47	73	16,5	16,5	0,0	0,00
47	76	16,5	18	1,5	2,25
50	73	18	16,5	1,5	2,25
51	86	19	20	1,0	1,00
54	85	20	19	1,0	1,00
					$289,50 = \Sigma d^2$

Po Spearmanovem obrazcu dobimo:

$$\varrho = 1 - \frac{6 \cdot 289{,}50}{20 \cdot (20^2 - 1)} = 0{,}77$$

Razlika med Pearsonovim korelacijskim koeficientom $r_{xy} = 0{,}76$ in Spearmanovim koeficientom korelacije ranga $= 0{,}77$ za iste podatke je minimalna. Pripomniti moramo, da rezultati praviloma niso tako podobni.

66. χ^2 (hi kvadrat)

66.0 Problem

Do sedaj obravnavani načini merjenja korelacije so bili omejeni na numerične znake, z edino izjemo korelacijskega razmerja. Vendar moremo govoriti tudi o povezanosti med atributivnimi znaki. Tako na primer obstaja povezava med barvo predmeta, ki je bil pokazan otroku, in njegovo izjavo, ki jo dá po določenem času o tem, kakšne barve je predmet. Čim večja je pri otrocih zmožnost razpoznavanja barv, tem večja je korelacija med dejansko barvo predmetov in izjavami otrok.

Povezave in odvisnosti med atributivnimi znaki prikazujemo s kontingenčnimi tabelami. Kontingenčna tabela je kombinacijska frekvenčna distribucija dveh koreliranih atributivnih znakov in je po svoji osnovi podobna korelacijski tabeli za numerične znake. Obe sta kombinacijski frekvenčni distribuciji in obe prikazujeta korelacijo — ena numeričnih, druga pa atributivnih znakov.

Kontingenčna tabela je na primer tabela 38, ki prikazuje soročnost izdelave poskusnih ključev 493 delavcev.

Tabela 38. Kontingenčna tabela med hitrostjo in kvaliteto izdelave poizkusnih ključev za 493 delavcev kovinske stroke

Kvaliteta / Hitrost	Pod-povprečna	Povprečna	Nad-povprečna	Skupaj
Hiter	29	126	16	174
Zmeren	49	190	41	280
Počasen	6	18	15	39
Skupaj	84	334	75	493

Če kvaliteta dela ne bi bila odvisna od hitrosti, bi bila struktura izdelkov po kvaliteti za vse stopnje hitrosti enaka. Z drugimi besedami: Delež onih, katerih izdelki so nadpovprečni, bi bil enak pri hitrih, zmernih ali počasnih delavcih. Ustrezne strukture, izračunane iz podatkov v tabeli 38, in grafikoni v slikah 6 in 7 pokažejo, da ni tako. Iz tabele 39 vidimo, da je samo 10,9 % onih, ki so delali hitro, doseglo nadpovprečno kvaliteto svojih izdelkov. Ta odstotek pa se s počasnejšim tempom dela veča in doseže pri onih, ki so delali počasi, 39,5 %. Očitna je odvisnost kvalitete od hitrosti dela.

Tabela 39. Strukture kvalitete izdelave poskusnih ključev po hitrostnih stopnjah za 493 delavcev kovinske stroke v LRS

Kvaliteta / Hitrost	Podpovprečna	Povprečna	Nadpovprečna	Skupaj
Hiter	16,7	72,4	10,9	100,0
Zmeren	17,5	67,9	14,6	100,0
Počasen	15,4	46,1	39,5	100,0
Skupaj	17,0	67,7	15,3	100,0

V primeru, da kvaliteta ne bi bila odvisna od hitrosti dela, bi morale biti strukture kvalitete za posamezne stopnje hitrosti med seboj enake, in sicer identične s skupno strukturo po kvaliteti ($pp = 17{,}0\,\%$; $p = 67{,}7\,\%$; $np = 15{,}3\,\%$). Kakšne pa bi bile frekvence v primeru neodvisnosti med hitrostjo in kvaliteto, moremo izračunati po splošnem obrazcu izračunavanja *teoretičnih frekvenc* f_t v primeru neodvisnosti

$$f_t = \frac{f_u \cdot f_v}{N} \tag{94}$$

Pri tem pomeni: f_t = teoretična frekvenca danega polja kontingenčne tabele; f_u = dejanska robna frekvenca kolone, na katero se nanaša f_t; f_v = dejanska robna frekvenca vrste, na katero se nanaša f_t.

Primer 63. Teoretične frekvence f_t za kontingenčno tabelo 38 so prikazane v tabeli 40.

Tabela 40. Teoretične frekvence kontingenčne tabele med kvaliteto in hitrostjo izdelave poskusnih ključev 493 delavcev kovinske stroke v LRS

Kvaliteta / Hitrost	Podpovprečna	Povprečna	Nadpovprečna	Skupaj
Hiter	29,65 f_t	117,88	26,47	174,00 f_v
Zmeren	47,70	189,70	42,60	280,00
Počasen	6,65	26,42	5,93	39,00
Skupaj	84,00 f_u	334,00	75,00	493,00

f_t za prvo polje je:

$$f_t = \frac{174 \cdot 84}{493} = 29{,}65$$

f_t za zadnje polje je:

$$f_t = \frac{39 \cdot 75}{493} = 5{,}93$$

V tabeli 40 je nakazan princip, iz katerih robnih frekvenc izračunamo posamezno teoretično frekvenco. Najenostavneje je, da v prazno kontingenčno tabelo vpišemo najprej robne frekvence, nato pa postopoma izračunavamo in vpisujemo v tabelo teoretične frekvence. Začuditi nas ne sme, da so frekvence f_t, čeprav pomenijo število enot, decimalna števila, ker so teoretične frekvence f_t izračunane vrednosti.

Čim bolj sta pojava med seboj odvisna, tem večje so razlike med stvarnimi — f in teoretičnimi — f_t frekvencami. Zaradi tega izkoriščamo kot merilo povezanosti dveh pojavov ravno razlike med stvarnimi in teoretičnimi frekvencami in z njihovo pomočjo izračunavamo koeficient, ki ga zaznamujemo s χ^2 (hi kvadrat). Osnovni obrazec izračunavanja χ^2 je obrazec

$$\chi^2 = \sum \frac{(f - f_t)^2}{f_t} \tag{95}$$

66.1 **Izračunavanje χ^2**

66.11 Osnovni obrazec. Izračunavanje po osnovnem obrazcu 95 ima naslednje stopnje:

a) Imamo kontingenčno tabelo dveh znakov f.

b) Iz robnih frekvenc izračunamo po obrazcu 94 teoretične frekvence f_t.

c) Izračunamo tabelo diferenc ustrezajočih stvarnih in teoretičnih frekvenc $f - f_t$.

d) Dobljene diference kvadriramo in vpišemo v tabelo kvadratov diferenc $(f - f_t)^2$.

e) Kvadrate diferenc delimo z ustreznimi teoretičnimi frekvencami: $(f - f_t)^2/f_t$.

f) Dobljene izraze seštejemo in dobimo χ^2.

Primer 64. Izračunali bomo χ^2 odvisnosti med kvaliteto in hitrostjo izdelave ključev iz tabele 38. Teoretične frekvence f_t smo izračunali že v primeru 63. V nadaljevanju ne bomo nakazali praktičnega izračunavanja po zgornjih sistematičnih točkah, temveč samo direkten račun po obrazcu 95.

$$\chi^2 = \frac{(29 - 29{,}65)^2}{29{,}65} + \frac{(126 - 117{,}88)^2}{117{,}88} + \ldots + \frac{(190 - 189{,}70)^2}{189{,}70} + \ldots +$$

$$+ \frac{(18 - 26{,}42)^2}{26{,}42} + \frac{(15 - 5{,}93)^2}{5{,}93} = 15{,}41$$

66.12 Alternativni obrazec. Izračunavanje χ^2 po osnovnem obrazcu se običajno izkaže kot neprikladno. Treba je izračunavati diference decimalnih števil in decimalna števila kvadrirati. Zaradi tega je včasih ugodneje izračunati χ^2 po alternativnem obrazcu

$$\chi^2 = \Sigma f^2/f_t - N \tag{96}$$

Izračunavanje χ^2 po tem obrazcu ima naslednje faze:

a) Imamo kontingenčno tabelo f.

b) Iz robnih frekvenc izračunamo po obrazcu 94 teoretične frekvence f_t.

c) Izračunamo tabelo kvadratov stvarnih frekvenc f^2.

d) Izračunamo tabelo kvocientov dobljenih kvadratov f^2 in ustrezajočih teoretičnih frekvenc f_t: f^2/f_t.

e) Izraze f^2/f_t seštejemo, od vsote pa odštejemo N. Tako dobimo χ^2.

Primer 65. Za podatke iz tabele 38 je izračun po tem postopku naslednji:

Tabela 41. Izračunavanje χ^2 odvisnosti med kvaliteto in hitrostjo pri izdelavi poskusnih ključev za 493 delavcev kovinske stroke v LRS po alternativnem obrazcu

a) f			b) f_t			c) f^2			d) f^2/f_t		
29	126	16	29,65	117,88	26,47	841	15876	256	28,37	134,68	9,67
49	190	41	47,70	189,70	42,60	2401	36100	1681	50,33	190,30	39,46
6	18	15	6,65	26,42	5,93	36	324	225	5,42	12,26	37,92

$\Sigma f^2/f_t = 28{,}37 + 50{,}33 + \ldots + 39{,}46 + 37{,}92 = 508{,}41$, po obrazcu 96 dobimo

$$\chi^2 = 508{,}41 - 493 = 15{,}41$$

66.13 Izračunavanje χ^2 brez teoretičnih frekvenc f_t. Kadar za druge namene ne potrebujemo teoretičnih frekvenc f_t, skrčimo računski posel na najmanjšo mero, če računamo χ^2 po naslednjem postopku:

a) Imamo kontingenčno tabelo f.

b) Izračunamo tabelo kvadratov stvarnih frekvenc f^2.

c) Dobljene kvadrate delimo z ustrezajočimi vrstnimi robnimi frekvencami f_v. Kvadrate prve vrste kontingenčne tabele delimo s prvo, kvadrate druge vrste z drugo robno vrstno frekvenco in tako dalje. Dobimo f^2/f_v.

d) Dobljene kvociente seštejemo po kolonah kontingenčne tabele. Dobimo $\Sigma f^2/f_v$.

e) Te vsote delimo z ustrezajočimi robnimi frekvencami kolon f_u. Dobimo izraze $(\Sigma f^2/f_v)/f_u$.

f) Če te kvociente seštejemo, od vsote pa odštejemo 1, dobimo H.

$\sum[\Sigma(f^2/f_v)/f_u] - 1 = H.$

g) Če H pomnožimo z N, dobimo χ^2.

Primer 66. Za podatke iz tabele 38 je račun χ^2 po tej metodi naslednji:

Tabela 42. Izračunavanje χ^2 odvisnosti med kvaliteto in hitrostjo pri izdelavi poskusnih ključev za 493 delavcev kovinske stroke v LRS po skrajšani metodi

a)	f			f_v	b)	f^2		c)	f^2/f_v	
	29	126	16	174	841	15876	256	4,833	91,241	1,471
	49	190	41	230	2401	36100	1681	8,575	128,929	6,004
	6	18	15	39	36	324	225	0,923	8,308	5,769
f_u	84	334	75	493			$\Sigma f^2/f_v =$	14,331	228,478	13,244
							$f_u =$	84	334	75
							$(\Sigma f^2/f_v)/f_u =$	0,17059	0,68407	0,17659

$$H = \sum[(\Sigma f^2/f_v)/f_u] - 1 = 0{,}03125$$

$$\chi^2 = HN = 0{,}03125 \cdot 493 = 15{,}41$$

66.14 χ^2 iz $2 \times r$ tabele. Izračunavanje χ^2 se še dalje poenostavi, če ima kontingenčna tabela po enem znaku samo dva razreda. Tako tabelo na kratko zaznamujemo z $2 \times r$ tabelo, za razliko od splošne, ki jo moremo zaznamovati z $r \times s$ tabelo (glede na število polj).

Tabela 42. Shema kontingenčne tabele $2 \times r$

f_1	f_2	f
N_1	N_2	N

$$p_1 = \frac{N_1}{N}$$

V shemi v tabeli 42 je f_1 frekvenčna distribucija po prvi, f_2 frekvenčna distribucija po drugi grupi znaka z dvema grupama, f pa skupna frekvenčna distribucija. Enako je N_1 število enot v prvi, N_2 število enot v drugi grupi, N pa skupno število enot. p_1 je strukturni delež prve grupe.

Glede na to simboliko izračunavamo χ^2 za $2 \times r$ distribucijo po treh obrazcih.

Obrazec 97 je splošen. Kot grupo 1 vzamemo grupo, ki je po obsegu manjša. Če sta N_1 in N_2 približno enaka, je enostavneje uporabljati obrazec 98, ker zmanjša števila, s katerimi računamo. Če pa sta N_1 in N_2 enaka, je najprikladnejši obrazec 99.

66.141 *Splošen obrazec.* Po obrazcu 97 izračunamo χ^2 po naslednjih stopnjah:

a) Imamo kontingenčno tabelo $2 \times r$.

b) Izberemo grupo z manjšim skupnim številom enot N_1.

c) Frekvence te grupe, vključno N_1, kvadriramo. Dobimo f_1^2 in N_1^2.

d) Dobljene kvadrate delimo z ustrezajočimi skupnimi frekvencami f, enako N_1^2 z N. Dobimo izraze f_1^2/f in izraz N_1^2/N.

e) Seštejemo izraze f_1^2/f. Dobimo $\Sigma f_1^2/f$.

f) Izračunamo $p_1 = N_1/N$.

g) Vse dobljene izraze vstavimo v obrazec

$$\chi^2 = \frac{\Sigma f_1^2/f - N_1^2/N}{p_1(1 - p_1)} \tag{97}$$

Primer 67. Iz študija zaznavanja barv izračunajmo po zgornjem postopku χ^2 odvisnosti pravilnega zaznavanja barv za štiriletne dečke. Frekvence pomenijo, v koliko primerih so preizkušani otroci po določenem času pravilno oziroma nepravilno ocenili barvo pokazanega predmeta.

Tabela 43. Izračunavanje χ^2 iz $2 \times r$ tabele pravilnega zaznavanja barv za štiriletne otroke

Barva	Pravilno	Nepravilno f_1	Skupno f	f_1^2	f_1^2/f	
Rumena	52	28	80	784	9,30	
Rdeča	43	37	80	1369	17,11	
Zelena	39	41	80	1681	21,01	
Modra	33	47	80	2209	27,61	$75{,}53 = \Sigma f_1^2/f$
	167	153	320	23409	$73{,}15 = N_1^2/N$	

$p_1 = 153/320 = 0{,}478$

Iz količine iz tabele 43 dobimo po obrazcu 97

$$\chi^2 = \frac{75{,}53 - 73{,}15}{0{,}478\,(1 - 0{,}478)} = 9{,}54$$

Kot grupo 1 smo izbrali grupo nepravilnih z $N_1 = 153$, ker je numerus N_1 manjši kot drugi. Računanje z drugo grupo ne bi bilo nepravilno, le podatki, s katerimi bi računali, bi bili večji.

66.142 $N_1 \approx N_2$. Če sta N_1 in N_2 v $2 \times r$ tabeli med seboj *približno enaka*, je praktičneje izračunati χ^2 po postopku, ki je zgornjemu podoben, vendar v osnovi drugačen. Faze tega postopka so:

a) Imamo kontingenčno tabelo $2 \times r$.

b) Izračunamo diference frekvenc $f_1 - f_2$, vključno sumo: $N_1 - N_2$.

c) Kvadriramo serijo diferenc $f_1 - f_2$, vključno $N_1 - N_2$. Tako dobimo $(f_1 - f_2)^2$ in $(N_1 - N_2)^2$.

d) Dobljene kvadrate delimo z ustrezajočimi skupnimi frekvencami f, enako $(N_1 - N_2)^2$ z N. Dobimo izraze $(f_1 - f_2)^2/f$ in $(N_1 - N_2)^2/N$.

e) Seštejemo dobljene izraze. Dobimo: $\Sigma (f_1 - f_2)^2/f$.

f) Izračunamo $p_1 = N_1/N$.

g) Vse zgornje izraze vstavimo v obrazec 98 in dobimo χ^2.

$$\chi^2 = \frac{\Sigma \frac{(f_1 - f_2)^2}{f} - \frac{(N_1 - N_2)^2}{N}}{4 p_1 (1 - p_1)} \tag{98}$$

Primer 68. Za iste podatke, kot so v primeru 67, izračunajmo χ^2 po drugem sistemu. Uporaba tega načina je upravičena, ker sta $N_1 = 167$ in $N_2 = 153$ malo različna.

Tabela 44. Izračunavanje χ^2 iz $2 \times r$ tabele pravilnega zaznavanja barv štiriletnih otrok po metodi diferenc frekvenc

Barva	f_1	f_2	f	$f_1 - f_2$	$(f_1 - f_2)^2$	$(f_1 - f_2)^2/f$	
Rumena	52	28	80	+ 24	576	7,20	
Rdeča	43	37	80	+ 6	36	0,45	
Zelena	39	41	80	— 2	4	0,05	
Modra	33	47	80	—14	196	2,45	$10{,}15 = \Sigma (f_1 - f_2)^2/f$
	167	153	320	+ 14	196	$0{,}6125 = N_1^2/N$	

$p_1 = 167/320 = 0{,}522$

Če vstavimo v tabeli dobljene izraze v obrazec 98, dobimo

$$\chi^2 = \frac{10{,}15 - 0{,}6125}{4 \cdot 0{,}522 \cdot (1 - 0{,}522)} = 9{,}54$$

Dobili smo isti rezultat z znatno manjšimi podatki.

66.143 $N_1 = N_2$. Če je število enot N v tabeli $2 \times r$ enako: $N_1 = N_2$, se izračunavanje še poenostavi z naslednjim postopkom:

a) Imamo kontingenčno tabelo $2 \times r$, v kateri je $N_1 = N_2$.

b) Enako kot pri prejšnji metodi izračunamo diference frekvenc $(f_1 - f_2)$, kvadrate diferenc $(f_1 - f_2)^2$, te kvadrate delimo z ustrezajočimi skupnimi frekvencami f, da dobimo izraze $(f_1 - f_2)^2/f$. Vsota teh izrazov je direktno enaka χ^2, ker za primer $N_1 = N_2$ velja obrazec

$$\chi^2 = \Sigma (f_1 - f_2)^2/f \tag{99}$$

Ta način je izredno preprost, v praksi pa pride dostikrat v poštev. Pri eksperimentalnem delu poleg eksperimentalne grupe dostikrat vzamemo tako imenovano kontrolno grupo z enakim številom enot kot v eksperimentalni grupi. Pogoji ene in druge grupe so različni, s χ^2 pa merimo odvisnost proučevanega pojava od spremembe pogojev.

Primer 69. Iz ankete specialne grupe 58 otrok (eksperimentalna grupa — *E*) smo dobili podatke o nevrotskih simptomih otrok. Da ugotovimo, koliko so ti simptomi karakteristični za to grupo, smo anketirali še 58 otrok, ki izhajajo iz drugega — normalnega okolja (kontrolna grupa — *K*). χ^2 naj pokaže jakost odvisnosti nevrotskih motenj od grupe.

Tabela 45. Izračunavanje χ^2 iz $2 \times r$ tabele odvisnosti nevrotskih motenj eksperimentalne grupe otrok

Nevrotski simptomi	*E* f_1	*K* f_2	f	$f_1 - f_2$	$(f_1 - f_2)^2$	$\frac{(f_1 - f_2)^2}{f}$
Brez	11	34	45	—23	529	11,75
Lažji	20	15	35	+ 5	25	0,71
Težji	27	9	36	+ 18	324	9,00
	58	58	116	0	0	21,46 $= \Sigma (f_1 - f_2)^2/f = \chi^2$

66.15 χ^2 iz 2×2 tabele. Ako je kontingenčna tabela oblike 2×2 (po obeh koreliranih znakih po dve grupi), moremo z obrazcem 100 izračunati χ^2 direktno

$$\frac{N\,(ad - cb)^2}{(a + b)\,(c + d)\,(a + c)\,(b + b)} \tag{100}$$

Pri tem so frekvence kontingenčne tabele zaznamovane tako, kakor je nakazano v tabeli 46. Vendar se izkaže, da je v dosti primerih tudi za tabele 2×2 primerneje računati χ^2 po enem izmed obrazcev izračunavanja χ^2 za tabele $2 \times r$, ki so opisane v odstavku 66.14.

Primer 70. Za primer odvisnosti zaznavanja zelene barve od spola za predšolsko mladino je postopek po obrazcu 100 naslednji:

Tabela 46. Izračunavanje iz 2×2 tabele o odvisnosti zaznavanja zelene barve od spola za predšolske otroke

Ocena barve	Dečki	Deklice	Skupaj
Pravilna	196	212	408
	a	*b*	*a* + *b*
Nepravilna	204	188	392
	c	*d*	*c* + *d*
Skupaj	400	400	800
	a + *c*	*b* + *d*	*N*

Po obrazcu 100 dobimo

$$\frac{800\,(196 \cdot 188 - 212 \cdot 204)^2}{408 \cdot 396 \cdot 400 \cdot 400} = 0{,}981$$

67. Φ^2 in C koeficient

χ^2 nima absolutnega pomena kot na primer korelacijski koeficient ali korelacijsko razmerje. Njegova vrednost ni odvisna samo od jakosti povezave, temveč tudi od števila grup in velikosti populacije. Zaradi tega moremo primerjati med seboj χ^2 samo onih podatkov, ki so si po vsebini in sestavu sorodni.

Zaradi hib, ki jih ima χ^2, dostikrat iz njega izračunavamo Φ^2, ki ga iz χ^2 dobimo z obrazcem

$$\Phi^2 = \chi^2/N \qquad (101)$$

S tem prijemom smo uspeli odstraniti vpliv obsega populacije na mero korelacije.

S *koeficientom kontingence C*, ki ga izračunavamo po obrazcu

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{N + \chi^2}} \qquad (102)$$

pa dosežemo, da je dana tudi zgornja meja v primeru maksimalne povezave. Te lastnosti nima niti χ^2 niti Φ^2. Najvišja možna vrednost koeficienta kontingence je odvisna od števila razredov po posameznih znakih in je tem večja, čim večje je število razredov. Pri velikem številu razredov se ta meja približuje 1.

68. Multipla in parcialna korelacija

68.1 Multipla korelacija

V prejšnjih odstavkih smo obravnavali metode in probleme, pri katerih je bil pojav odvisen le od enega faktorja. Analiza pa pokaže, da v praksi in teoriji dostikrat nastopajo problemi odvisnosti od več faktorjev hkrati. Problematika proučevanja *multiple korelacije* je kompleksnejša od enostavne, vendar po svoji osnovi podobna. Enako kot pri enostavni korelaciji tudi pri multipli korelaciji celoten učinek vseh faktorjev razdelimo v del, odvisen od bistvenih, in del, odvisen od individualnih — slučajnih faktorjev. Podobno kot enostavno korelacijo merimo tudi multiplo z razmerjem variance zaradi bistvenih faktorjev in skupne variance, iščemo regresije povezav itd.

68.2 Parcialna korelacija

Dva pojava moreta biti med seboj povezana posredno zaradi vpliva tretjega oziroma več drugih pojavov. Ti vplivajo tako na prvi kot na drugi pojav in imajo za posledico, da sta ta dva pojava korelirana. Ako eliminiramo vpliv teh posrednih faktorjev, govorimo o *parcialni korelaciji* in *parcialnih korelacijskih koeficientih*, ki merijo stvarno korelacijo med dvema znakoma brez posrednih vplivov drugih znakov.

Obrazec

$$r_{12,345\ldots} = \frac{r_{12,45\ldots} - r_{13,45\ldots}\, r_{23,45\ldots}}{\sqrt{1 - r^2_{13,45\ldots}}\;\sqrt{1 - r^2_{23,45\ldots}}} \tag{103}$$

je splošen rekurzijski obrazec izračunavanja parcialnega korelacijskega koeficienta med znakoma 1 in 2, pri čemer so eliminirani faktorji 3, 4, 5 ...

S postopno uporabo obrazca 103 moremo izračunati parcialni korelacijski koeficient s poljubnim številom eliminiranih znakov. Kot vidimo iz obrazca 103, izračunamo parcialni korelacijski koeficient iz parcialnih korelacijskih koeficientov, ki imajo en eliminiran faktor manj. Tako moremo iz navadnih korelacijskih koeficientov izračunati parcialne korelacijske koeficiente, pri katerih smo eliminirali en faktor, iz teh parcialne korelacijske koeficiente, iz katerih smo eliminirali dva faktorja in tako dalje do poljubnega števila eliminiranih faktorjev. Vendar je uporaba koeficientov parcialne korelacije pri eliminaciji več faktorjev, ne glede na tehnične težave izračunavanja, večkrat vsebinsko problematična.

7 VZORČENJE

71. Verjetnost

Ocenjevanje z vzorčenjem je osnovano na verjetnostnem računu. Zaradi tega je za razumevanje vzorčnih metod nujno potrebno poznavanje vsaj osnovnih pojmov o verjetnosti in verjetnostnem računu.

71.1 Verjetnost v vsakdanjem življenju

Pojem verjetnosti poznamo iz vsakdanjega življenja. Govorimo o malo verjetnih, zelo verjetnih, neverjetnih, gotovih dogodkih. Kakšna je verjetnost nekega dogodka, sklepamo po tem, kolikokrat se je pod pogoji, v katerih bi mogel nastopiti, dogodek zgodil. Pri tem nismo razočarani, če se dogodek, ki ga z določeno verjetnostjo napovedujemo, v konkretnem primeru ne zgodi. Stvarno v življenju računamo s samimi verjetnimi dogodki. Tudi dogodki, na katere računamo z gotovostjo, so samo dogodki, za katere je verjetnost, da se zgode, zelo velika.

Če imamo sestanek z dvema znancema A in B, pravimo, da bo verjetno A prišel na sestanek pravočasno, B pa bo verjetno zamudil. Ta sklep smo mogli napraviti, ker oba dobro poznamo in vemo, kako se je eden in drugi obnašal ob sestankih v preteklosti. Za tistega, ki je običajno zamujal, pravimo tudi za ta sestanek, da ga bo verjetno zamudil. Za drugega, ki je običajno prihajal na sestanke točno, pa sklepamo, da verjetno tudi tega sestanka ne bo zamudil.

Pojem verjetnosti, kot ga poznamo iz vsakdanjega življenja, ima več značilnosti, ki jih ima tudi pojem verjetnosti v verjetnostnem računu. Iz zgornjega primera vidimo, da se verjetnost nanaša na dogodke v prihodnosti in da se da kvantitativno opredeliti, čeprav samo z atributi bolj, manj, zelo itd. Stopnjo verjetnosti določamo po tem, kako pogosto se je dogodek v preteklosti zgodil v primerjavi z možnostmi, ko bi se mogel zgoditi.

71.2 Aposteriorna verjetnost

Pojem verjetnosti v vsakdanjem smislu je zelo blizu pojmu aposteriorne verjetnosti v verjetnostnem računu. Verjetnost »a posteriori« je definirana kot limita razmerja med številom ugodnih in možnih dogodkov, če se število možnih dogodkov neomejeno veča. Kot ugodne dogodke štejemo primere, ko se določeni dogodek A zgodi, možni dogodki pa so vsi primeri, v katerih bi se dogodek A mogel zgoditi. V obrazcu

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n} \tag{104}$$

je ta definicija pisana v matematični obliki. Pri tem je $P(A)$ verjetnost, da se dogodek A zgodi, n_A število primerov, v katerih se je dogodek A zgodil, n pa število vseh primerov, v katerih bi se dogodek A mogel zgoditi.

Verjetnost, da pri metu kocke vržemo šestico, dobimo po tem principu tako, da kocko mečemo v zrak, štejemo število metov n in registriramo število metov, pri katerih smo vrgli šestico n_A. Če bi število metov ponavljali v nedogled, bi razmerje n_A/n bilo enako verjetnosti, da vržemo šestico — dobljeni aposteriorno. Jasno je, da tako do vrednosti verjetnosti za konkretne dogodke nikdar ne moremo priti, ker je nemogoče realizirati neomejeno število dogodkov. Vendar pa vemo, da se po zakonu o velikih številih kvocient n_A/n vedno bolj približuje vrednosti verjetnosti za dani dogodek, čim večje je število možnih dogodkov. Tako se moremo vrednosti verjetnosti poljubno približati, če število dogodkov večamo.

Iz definicije verjetnosti vidimo, da je verjetnost pozitivna količina med 0 in 1. Verjetnost je 0 v primeru, da je dogodek neverjeten, 1 pa v primeru, da je dogodek gotov. Vmesne stopnje kažejo večjo ali manjšo verjetnost. Medtem ko v vsakdanjem življenju stopnjo verjetnosti izražamo z izrazi: neverjeten, malo verjeten, verjeten, zelo verjeten, gotov, v matematičnem smislu verjetnost objektivno merimo z vrednostmi med 0 in 1.

71.3 Apriorna verjetnost

Do verjetnosti, da s kocko vržemo šestico, pa moremo priti tudi drugače. Ker poznamo lastnosti kocke, vemo, da je skupno šest različnih možnih dogodkov, če štejemo met vsake izmed šestih števil kocke kot različen dogodek. Če je kocka pravilna (ni obtežena na določenem mestu), pravimo, da je met vsake izmed šestih števil *enako možen*, ker ni razloga, če je kocka pravilna, da bi imela ena številka večjo možnost kot druga. V velikem številu metov bi se po tem sklepu vsaka številka pojavila približno enako mnogokrat, v limiti pa enakokrat, ali številčno izraženo v $^1/_6$ vseh primerov. Tako smo prišli do vrednosti verjetnosti, na osnovi poznavanja lastnosti kocke same, ne da bi realizirali neomejeno ali zelo veliko število metov. Ta način določanja verjetnosti imenujemo apriorni način. Po tej definiciji je verjetnost danega dogodka kvocient med številom ugodnih in skupnim številom enakomožnih dogodkov ali relativna frekvenca dogodka v skupnem številu vseh enakomožnih dogodkov. Ta princip pa predpostavlja poznavanje vseh možnih dogodkov in razstavljanje te mase dogodkov na enakomožne.

71.4 Seštevanje verjetnosti

Verjetnostni račun dopušča z verjetnostmi niz računskih operacij, od katerih bomo omenili samo seštevanje verjetnosti, ker ga bomo direktno potrebovali v vzorčenju. Če je verjetnost, da vržemo s pravilno kocko šestico, enaka $^1/_6$ in verjetnost, da vržemo petico, enaka $^1/_6$, je verjetnost, da vržemo petico ali šestico enaka $P(5 \text{ ali } 6) = P(5) + P(6) = 1/6 + 1/6 = 2/6$. Verjetnosti moremo torej seštevati. Vendar moramo biti pri tej operaciji oprezni. Enostaven način seštevanja verjetnosti pride v poštev samo pri dogodkih, ki se izključujejo, kar pomeni, da dogodka ne moreta nastopiti istočasno. Pri kocki je to primer. Če pade petica, ne more namreč istočasno pasti še šestica. Kot nasproten primer vzemimo igralne karte. Imamo 32 igralnih kart in iz njih povlečemo karto. V celoti imamo 32 enakomožnih različnih dogodkov, ker imamo 32 kart, ki niso zaznamovane in ni razloga, da bi bila možnost za posamezne karte različna. Če skušamo ugotoviti, kakšna je verjetnost, da potegnemo karo, je ta verjetnost enaka $P(\text{karo}) = 8/32$, ker je od vseh 32 enakomožnih dogodkov 8 kar, torej osem ugodnih. Verjetnost, da potegnemo as karto, je po istem sklepu $P(\text{as}) = 4/32$, ker so v kartah štirje asi. Po zgornjem principu seštevanja bi morala biti verjetnost, da potegnemo karto, ki je karo ali as, enaka $P(\text{karo ali as}) = P(\text{karo}) + P(\text{as}) = 8/32 + 4/32 = 12/32$. Vendar se izkaže, da ni tako. Pregled kart pokaže, da je od 32 kart samo 11 takih, ki so karo ali as, ker karta »karo as« istočasno združuje obe karakteristiki. Verjetnost, da potegnemo karo ali as, je torej 11/32 in ne 12/32, kot smo izračunali zgoraj. Dogodka »izvlačenje kare« in »izvlačenje asa« se ne izključujeta, ker imamo dogodek, ki istočasno spada v prvo in drugo grupo. V primeru dogodkov, ki se ne izključujejo, seštevamo verjetnosti torej po obrazcu

$$P(A \text{ ali } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ in } B) \qquad (105)$$

pri čemer pomeni $P(A \text{ in } B)$ verjetnost, da se zgodi A in B istočasno. Ta obrazec vključuje tudi primer dogodkov, ki se izključujejo, ker je v tem primeru $P(A \text{ in } B) = 0$.

Primer 71. Kolika je verjetnost, da iz normalno distribuirane populacije na slepo potegnemo enoto, za katero je standardiziran odklon z manjši kot $-1{,}96$ ali večji kot $+1{,}96$. Po načelu apriornega določanja verjetnosti je verjetnost nekega dogodka enaka relativni frekvenci dogodka v populaciji enako možnih. S tem da smo rekli, da izbiramo iz normalne populacije na slepo, je enakomožnost zagotovljena. Verjetnost, da potegnemo enoto, katere standardiziran odklon je manjši kot $-1{,}96$, je po tablicah relativne frekvence normalne distribucije enaka $P(z < -1{,}96) = 0{,}025$. Verjetnost, da potegnemo enoto, ki ima z večji kot $+1{,}96$ pa $P(z > +1{,}96) = 0{,}025$. Ta dva dogodka se izključujeta, ker ne moremo potegniti enote, za katero bi bil z istočasno manjši od $-1{,}96$ in večji kot $+1{,}96$. Verjetnost, da potegnemo enoto, za katero je z manjši kot $-1{,}96$ ali večji kot $+1{,}96$, je enaka navadni vsoti obeh verjetnosti, torej: $P(z < -1{,}96$ ali $z > +1{,}96) = 0{,}025 + 0{,}025 = 0{,}05$.

Primer 72. Kolika je verjetnost, da iz normalno distribuirane populacije izvlečemo na slepo enoto, za katero bo $z < +0{,}45$ ali v intervalu $0 < z < +1{,}645$. Ta dva dogodka se ne izključujeta, ker so vse vrednosti z na intervalu od 0 do $+0{,}45$ take, da istočasno spadajo v prvo in drugo grupo. Zaradi tega je:

$$P(z < +0{,}45 \text{ ali } 0 < z < +1{,}645) = P(z < 0{,}45) + P(0 < z < 1{,}45) -$$
$$- P(0 < z < 0{,}45) = 0{,}8326 + 0{,}4500 - 0{,}3264 = 0{,}9500$$

71.5 **Princip ocenjevanja**

Vzemimo da iščemo verjetnost, da iz žare s 5000 anketnimi listi za moške in ženske potegnemo na slepo popisnico za žensko osebo. To verjetnost moremo poiskati na dva načina: apriorno in aposteriorno. Če iščemo verjetnost *apriorno* moramo prešteti, koliko je v žari popisnic, ki se nanašajo na ženske, in najdemo, da je to število 2000. Ker smatramo zaradi izvlačenja na slepo, da je enaka možnost, da potegnemo katero koli popisnico, je po sistemu apriornega izračunavanja verjetnosti, verjetnost, da potegnemo popisnico za žensko, enaka $P(\check{Z}) = 2000/5000 = 0{,}40$. Ta način se sklada po svoji osnovi s statističnim popisom, pri katerem pregledamo vse enote populacije, rezultat, ki smo ga dobili, pa je identičen z relativno frekvenco oziroma s strukturnim deležem žensk v celotni populaciji, kar je važen statistični parameter. Do verjetnosti, da potegnemo iz žare popisnico za žensko, če je izvlačenje na slepo, pa moremo priti tudi *aposteriorno.* Po tem načinu dobimo oceno verjetnosti, če na slepo izvlačimo posamezne popisnice, kot razmerje med številom izvlečenih popisnic, ki so se nanašale na ženske, in skupnim številom na slepo izvlečenih popisnic. n_A/n je ocena te verjetnosti in obenem, kot sledi iz apriorne definicije, ocena strukturnega deleža žensk v populaciji. To razmerje je pravi vrednosti strukturnega deleža po zakonu velikih števil tem bliže, čim več popisnic smo izvlekli iz žare. Izkazati pa se more, da smo prišli do zadostno zanesljive ocene z izvlačenjem na slepo laže, ceneje in hitreje, kot pa s celotnim pregledom vseh enot — popisom, ker nam je bilo treba pregledati le del enot populacije. Ta princip je osnovni princip načina ocenjevanja z vzorčenjem. Iz tega primera moremo zaključiti, kar bomo kasneje poudarjali še na več mestih, da je osnovna naloga uporabe metod vzorčenja, zagotoviti enakomožnost izvlačenja za vse enote. To dosežemo z *izborom na slepo* ali *slučajnim izborom*. Le v tem primeru velja mehanizem verjetnostnega računa, ki omogoča, da te rezultate uporabimo kot ocene.

71.6 **Distribucije verjetnosti**

V nadaljevanju bomo imeli veliko opravka z distribucijami verjetnosti najrazličnejših izrazov. Te distribucije relativnih frekvenc določenih izrazov imenujemo *distribucije verjetnosti*. To pa zaradi tega, ker pokažejo, s kakšno verjetnostjo moremo pričakovati določene vrednosti teh izrazov. Ena izmed takih distribucij je normalna distribucija, katero smo že podrobneje obravnavali. Relativna frekvenca vrednosti normalno distribuirane populacije v določenem intervalu se grafično ujema s površino pod normalno distribucijo v tem intervalu. Ta relativna frekvenca je verjetnost, s katero moremo pričakovati, da, ako na slepo potegnemo iz normalne distribucije enoto, vrednost te enote pade v ta interval.

V sliki 12 imamo narisane različne površine pod normalno distribucijo. Te površine predstavljajo relativne frekvence v teh intervalih, oziroma verjetnosti, da je vrednost v naznačenih intervalih. Vse izmed naznačenih površin — verjetnosti pridejo v poštev v praksi ocenjevanja z vzorci.

Poleg normalne distribucije imamo še distribucije verjetnosti drugih izrazov. Osnova in pomen teh je identičen z osnovo in pomenom normalne verjetnostne distribucije.

71.7 **Pojem rizika**

Z dogodki, ki nastopajo z veliko verjetnostjo, računamo v vsakdanjem življenju kot z gotovimi. Ko prekoračimo cesto, z gotovostjo računamo, da nas ne bo povozil avtomobil, čeprav obstaja določena verjetnost, da se bo to zgodilo. Ta verjetnost pa je tako majhna, da jo praktično zanemarjamo.

Vse dogodke, ki nastopajo z veliko verjetnostjo, smatramo praktično kot gotove, čeprav je neka verjetnost, da se dogodek, ki ga z gotovostjo pričakujemo, ne bo zgodil. V vseh teh absolutnih izjavah je določena stopnja *rizika*, ki je merjen z verjetnostjo, da se dogodek, katerega smatramo za gotovega, ne bo zgodil.

Vsi statistični zaključki, ki spadajo v področje ocenjevanja z vzorčenjem, so v bistvu enaki zgornjemu načinu zaključevanja. Vsak zaključek, ki ga napravimo, in rezultat, ki ga damo, ne drži absolutno, temveč z določeno stopnjo rizika. Stopnje rizika, s katerimi delamo zaključke, so različne: 0,10, 0,05, 0,01, 0,001, odvisno od problema. Najpogosteje delamo sklepe s 5% rizikom, kar pomeni, da take trditve v povprečju v enem primeru od dvajsetih ne drže.

Primer 73. Vse možne vrednosti normalne distribucije leže na intervalu od $-\infty$ do $+\infty$. Vendar so z verjetnostjo 0,99 na intervalu od $M - 2{,}57\,\sigma$ do $M + 2{,}57\,\sigma$. Če trdimo: »Vse vrednosti normalne distribuirane populacije so med $M - 2{,}57\,\sigma$ do $M + 2{,}57\,\sigma$,« je riziko te izjave $1{,}00 - 0{,}99 = 0{,}01$. To pomeni: če bi nekdo našo izjavo skušal preveriti, bi v povprečju v enem izmed sto preizkusov dokazal, da naša trditev ne velja.

Podobno moremo za normalno distribucijo postaviti trditev: standardiziran odklon z za normalno distribucijo je manjši kot $+1{,}645$. Riziko te izjave je 0,05, ker je 0,05 vseh vrednosti populacije nad to mejo.

Tabele t, χ^2 in F distribucij v dodatku pokažejo — z določeno stopnjo rizika P, ki je v tabelah označen — pod katerimi vrednostmi leže te količine.

72. Veliki vzorci

72.1 Populacija. Vzorec. Populacija vseh vzorcev

Kakor že vemo, smatramo kot populacijo v statističnem smislu skupnost vseh sorodnih pojavov, ki zadoščajo danim pogojem in so predmet našega proučevanja. Tako morejo biti populacija vsi učenci tretjega razreda vseh srednjih šol v LR Sloveniji, skupnost vseh delavcev kovinske stroke v Jugoslaviji, skupnost vseh predmetov, ki jih je napravila določena skupina oseb pod določenimi pogoji dela in tako dalje. Statistika z deskriptivnimi metodami opisuje populacije s parametri, kot so: sredine, mere variacije, koeficienti korelacije in tako dalje.

Raziskovanja, v katerih iščemo prave vrednosti parametrov, so časovno dolgotrajna, tehnično težko izvedljiva in draga, ker so populacije običajno po številu enot zelo obsežne. Imamo celo primere, da imajo populacije neomejeno število enot. Take populacije so v psihologiji zelo pogoste. Dostikrat namreč formiramo tako imenovane *hipotetične populacije*, ki so sestavljene iz neomejenega števila umišljenih enot — vseh možnih poskusov, testov, mnenj in tako dalje — ki bi jih dobili, če bi mogli naše poskuse, teste, anketiranja ponavljati pod enakimi pogoji v nedogled. Jasno je, da takih populacij ne moremo realizirati, morejo pa brez nadaljnjega nastopati kot populacije v pravem smislu. Prav iz potrebe raziskav hipotetičnih populacij, ki jih s popolnim opazovanjem ne moremo analizirati, je izšlo vprašanje, ali je možno opisovati in analizirati populacijo, če nam je znan samo razmeroma majhen del enot, ki to populacijo sestavljajo. Izkazalo se je, da je to možno in da je najobjektivnejši način takega opazovanja, da so enote te delne populacije izbrane na slepo. O ocenjevanju na osnovi slučajno izbrane delne populacije se je razvila posebna metoda — metoda vzorčenja. Vzorčenje omogoča dosti kompleksno ocenjevanje parametrov in analiziranje populacij. Glavne prednosti te metode pred ostalimi metodami, ki imajo tudi za cilj sklepanje iz dela populacije na celoto, so: a) metoda vzorčenja je objektivna metoda; b) zanesljivost ocen se dá izmeriti; c) zanesljivost ocen moremo poljubno regulirati.

Skupnost enot, ki smo jih iz populacije izbrali slučajno, imenujemo *vzorec*. Število enot v vzorcu po pravilu zaznamujemo z n, za razliko od števila enot populacije, ki ga zaznamujemo z N. Iz podatkov vzorca izračunavamo ocene parametrov populacije. Tako je na primer aritmetična sredina vzorca $\bar{x}$ ocena parametra — aritmetične sredine populacije M_x.

Vzemimo, da imamo populacijo, ki sestoji iz $N = 1000$ oseb. Iz te populacije izberemo po slučajnem načinu vzorec $n = 100$ oseb. Če teh sto oseb testiramo in iz rezultatov testiranja vzorca izračunamo aritmetično sredino $\bar{x}_1$, je ta sredina karakteristika tega vzorca. Izbor ponovimo in iz populacije izberimo po istem postopku zopet $n = 100$ oseb, jih testiramo, iz rezultatov pa izračunamo aritmetično sredino $\bar{x}_2$. Zelo verjetno bo novi vzorec vseboval druge osebe kot prvi, izračunana sredina pa bo različna od prve. Iz iste populacije moremo enako izbirati naprej tretji, četrti, peti itd. vzorec po 100 oseb. Število vseh možnih različnih vzorcev po $n = 100$ enot iz populacije z $N = 1000$ enotami je ogromno (število s 146 decimalnimi mesti). Jasno, da morejo pri ponovnih izborih iste osebe biti večkrat izbrane, toda v drugi kombinaciji.

Za vsak vzorec po $n = 100$ oseb bi mogli izračunati aritmetično sredino vzorca $\bar{x}$. Ako analiziramo skupnost vseh možnih različnih vzorcev in njih aritmetične sredine, spoznamo, da predstavlja skupnost vseh možnih vzorcev populacijo v statističnem smislu. V tej populaciji je posamezen vzorec enota populacije, aritmetična sredina vzorca pa statistični znak. *Populacija vseh možnih vzorcev* ima vse značilnosti statističnih populacij: sestavljena je iz sorodnih enot — vzorcev, ki imajo svoje znake — aritmetične sredine, ki variirajo.

72.2 Ocenjevanje aritmetične sredine

72.21 Vzorčna distribucija sredin. Da bi dobili pregled vseh vrednosti aritmetičnih sredin populacije vseh možnih vzorcev, bi morali realizirati vse možne vzorce, za vsakega izmed njih izračunati aritmetično sredino $\bar{x}$, sestaviti frekvenčno distribucijo vseh vrednosti aritmetičnih sredin, iz te pa izračunati parametre populacije vseh možnih vzorcev, kot so: aritmetična sredina sredin vseh vzorcev $M_{\bar{x}}$, standardno deviacijo sredin vseh vzorcev $\sigma^2_{\bar{x}}$ itd. Po tej poti je seveda zaradi preogromnega števila vseh možnih vzorcev nemogoče priti do cilja.

Aritmetično sredino vzorca zaznamujemo na splošno z $\bar{x}$ (x prečna) za razliko od aritmetične sredine populacije M_x. $\bar{x}$ izračunavamo po obrazcu

$$\bar{x} = \frac{1}{n} Sx \tag{106}$$

Pri tem pomeni S sumiranje v vzorcu, za razliko od Σ, ki pomeni sumiranje v populaciji.

Teorija vzorčenja pa je indirektno odkrila osnovne zakonistosti distribuiranja aritmetičnih sredin populacije vzorcev. Te zakonitosti so:

a) Frekvenčna distribucija aritmetičnih sredin vseh vzorcev je normalna distribucija. Za populacije, za katere je x normalno distribuiran, velja ta zakonitost na splošno, če se v osnovni populaciji x distribuira drugače, pa le, če vzorec ni premajhen.

b) Aritmetična sredina aritmetičnih sredin vseh vzorcev $M_{\bar{x}}$ je enaka aritmetični sredini x v populaciji M_x

$$M_{\bar{x}} = M_x \tag{107}$$

c) Standardni odklon aritmetičnih sredin vzorcev, ki ga imenujemo *standardna pogreška ocene sredine*, zaznamujemo pa s $SE_{\bar{x}}$, izračunamo po obrazcu

$$SE_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \tag{108}$$

Standardna pogreška ocene aritmetične sredine je torej odvisna od standardnega odklona v populaciji σ_x in velikosti vzorca n.

Ker je normalna distribucija določena z aritmetično sredino in standardnim odklonom, je, kot vidimo iz točk a, b in c, distribucija sredin vzorcev popolnoma znana, če poznamo M_x in σ_x populacije in velikost vzorca n.

72.22 Ocena. Interval in meje zaupanja. Iz zgornjih zakonitosti moremo napraviti nadaljnje zaključke: Aritmetične sredine vzorcev $\bar{x}$ se odklanjajo od aritmetične sredine populacije M navzgor in navzdol. Bolj verjetni so manjši in manj verjetni večji odkloni aritmetičnih sredin vzorcev $\bar{x}$ od aritmetične sredine populacije M_x. Zaradi tega moremo smatrati aritmetično sredino posameznega vzorca $\bar{x}$ kot *oceno* aritmetične sredine populacije — *prave vrednosti* aritmetične sredine M_x.

Standardna pogreška ocen prave aritmetične sredine $SE_{\bar{x}}$ je povprečen kvadratičen odklon $\bar{x}$ od M_x. Zaradi tega merimo z njo zanesljivost ocen. Čim manjša je standardna pogreška, tem zanesljivejša je ocena, ker so odkloni ocen v povprečju v tem primeru manjši. Kot vidimo iz obrazca 108, je standardna pogreška ocene aritmetične sredine premo sorazmerna variabilnosti podatkov v populaciji in obratno sorazmerna s kvadratnim korenom iz števila enot v vzorcu n.

Zanesljivost ocene moremo torej spreminjati s spreminjanjem velikosti vzorca. Iz obrazca je razvidno, da je treba vzorec povečati štirikratno, če hočemo, da bo standardna pogreška ocene dvakrat manjša, oziroma devetkratno, če hočemo standardno pogreško zmanjšati na tretjino, in tako dalje.

Iz zakonitosti, ki veljajo za normalno distribuirane populacije, vemo, da se posamezne vrednosti normalno distribuirane populacije zelo poredko (povprečno v petih od sto primerov) odklanjajo od aritmetične sredine za več kot $1{,}96\sigma$. Ta stavek pa moremo povedati tudi v obrnjeni obliki: »Zelo poredko (v petih od sto primerov) se aritmetična sredina populacije odklanja od posamezne vrednosti za več kot $1{,}96\sigma$«. Če ta stavek prenesemo na populacijo sredin vzorcev in upoštevamo zakonitosti iz 72.21, dobimo stavek, ki je osnovne važnosti za ocenjevanje: Prava aritmetična sredina populacije M_x se z rizikom 0,05 odklanja od ocene aritmetične sredine $\bar{x}$, ki smo jo dobili s slučajnim vzorcem, za manj kot $1{,}96 SE_{\bar{x}}$; ali drugače:

Prava aritmetična sredina M_x je z rizikom 0,05 v intervalu $\bar{x} - 1{,}96 SE_{\bar{x}}$ do $\bar{x} + 1{,}96 SE_{\bar{x}}$.

Prava vrednost M_x v tem primeru ni ocenjena z eno samo vrednostjo $\bar{x}$, temveč z intervalom, v katerem je z določenim rizikom. Ta interval imenujemo *interval zaupanja*, njegovi meji pa *spodnjo in zgornjo mejo zaupanja.*

Koeficient 1,96 moremo zamenjati z manjšim, na primer 1,645. Tako smo interval zaupanja sicer zmanjšali, povečali pa smo riziko, da prava aritmetična sredina ne leži v mejah zaupanja, na 0,10.

Interval zaupanja pa moremo spreminjati tudi s spremembo velikosti vzorca. Čim večji je vzorec, tem ožji je interval zaupanja in zato večja zanesljivost ocene.

72.23 Nepristrana ocena variance. Če hočemo izračunati $SE_{\bar{x}}$, moramo po obrazcu 108 poznati pravo vrednost standardnega odklona populacije σ_x. Ta obrazec nima operativne vrednosti, ker standardnega odklona populacije ne poznamo. Moremo pa ga z obrazcem

$$s_x^2 = \frac{S(x - \bar{x})^2}{n - 1} \tag{109}$$

oceniti iz podatkov vzorca.

Ta obrazec je po svojem sestavu podoben obrazcu izračunavanja variance populacije σ_x^2, le da vsoto odklonov od aritmetične sredine delimo z $n - 1$ namesto z n, kot bi pričakovali. Ta sprememba je potrebna zaradi tega, da je s_x^2 nepristrana ocena variance populacije σ_x^2. Oceno smatramo za nepristrano, ako je aritmetična sredina ocen parametra enaka parametru.

Za primer nepristrane ocene variance velja obrazec

$$M_{s^2} = \sigma^2 \tag{110}$$

Iz obrazca 107 vidimo, da je tudi $\bar{x}$ nepristrana ocena od M_x.

Primer 74. Na ljubljanskih šolah je bilo v letu 1955 testiranih s testom zmožnosti presojanja mehanskih odnosov 342 deklet, ki so bile iz populacije vseh gimnazijk nižjih razredov gimnazij izbrane po slučajnem načinu. Ocena povprečja doseženih točk iz vzorca je $\bar{x} = 22{,}42$, ocena standardnega odklona pa $s = 10{,}08$. Kolika je standardna pogreška ocene aritmetične sredine $SE_{\bar{x}}$ in kolike so meje zaupanja ocene aritmetične sredine s 0,05 rizikom?

Po obrazcu 108 dobimo, da je:

$$SE_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}} = \frac{10{,}08}{\sqrt{342}} = 0{,}546; \quad z(\overline{G} = 0{,}05) = 1{,}96$$

Največji možen odklon z rizikom 0,05 $e_{\bar{x}}$ dobimo enak

$$e_{\bar{x}} = z \cdot SE_{\bar{x}} = 1{,}96 \cdot 0{,}546 = 1{,}07$$

meje zaupanja pa so:

$$\bar{x} - e_{\bar{x}} < M_x < \bar{x} + e_{\bar{x}} \quad \ldots$$

$$22{,}42 - 1{,}07 < M_x < 22{,}42 + 1{,}07$$

$$21{,}35 < M_x < 23{,}49$$

Standardno pogreško moremo meriti tudi v odstotkih od ocene. Tako dobimo, da je:

$$SE_{\bar{x}}\,\% = 100\,\frac{SE_{\bar{x}}}{\bar{x}} = 100\,\frac{0{,}546}{22{,}42} = 2{,}4\,\%$$

Standardna pogreška ocene je torej $SE_{\bar{x}} = 0{,}546$ ali merjena relativno, $SE_{\bar{x}}\,\% = 2{,}4\,\%$. Prava vrednost povprečja leži s 5 % rizikom med 21,35 do 23,49 točk. Prava vrednost povprečja M_x s 5 % rizikom ni od ocene $\bar{x} = 22{,}42$ različna za več kot $e_{\bar{x}} = 1{,}07$ ali relativno za $e_{\bar{x}}\,\% = 4{,}78\,\%$.

72.24 Določanje velikosti vzorca. Iz dosedanjega izvajanja in primera smo videli, da moremo iz podatkov vzorca oceniti standardno pogreško oziroma zanesljivost ocene aritmetične sredine. Iz obrazca 108 za izračunavanje standardne pogreške ocene vidimo, da moramo vzeti vzorec tem večji, čim večjo zanesljivost ocene želimo. Ne moremo pa s tem obrazcem rešiti problema: kako velik vzorec moramo vzeti, da bomo dobili z njim vnaprej predpisano zanesljivost ocene. Ta problem je ravno obraten od prejšnjega in pride v praksi pogosto v poštev pri planiranju vzorcev.

Z $e_{\bar{x}}$ zaznamujmo največji dopusten odklon ocene $\bar{x}$ od prave vrednosti M_x, z z pa riziku, ki ga dopuščamo, ustrezajočo vrednost standardiziranega odklona z (če je riziko 0,05, je $z = 1{,}96$, če je riziko 0,10, je $z = 1{,}645$, če je riziko 0,01, je $z = 2{,}58$). Če je σ standardni odklon znaka v populaciji, dobimo število enot v vzorcu, ki je potrebno, da dosežemo predpisano zanesljivost, po obrazcu

$$n = \left(\frac{z\sigma}{e_{\bar{x}}}\right)^2 \tag{111}$$

Vrednost standardnega odklona populacije σ seveda pri planiranju vzorca v konkretnih primerih ne poznamo. Moremo ga pa oceniti na osnovi podatkov prejšnjih raziskav in splošne analize pojava.

Ako je dopusten odklon ocene $\bar{x}$ od prave vrednosti aritmetične sredine dan relativno v odstotku od aritmetične sredine $e_{\bar{x}}\,\%$, ocenjujemo velikost vzorca po obrazcu

$$n = \left(\frac{100\, z\sigma}{e_{\bar{x}}\%\, M}\right)^2 \tag{112}$$

σ in M sta približni oceni parametrov populacije, dobljeni na osnovi prejšnjih raziskav.

Primer 75. Standardni odklon dosežkov testa presojanja mehanskih odnosov za dečke cenimo na $SD = 11{,}0$. Kako velik vzorec moramo vzeti, da ocena aritmetične sredine $\bar{x}$ s 5 % rizikom ne bo različna od prave vrednosti M za več kot eno točko: $e_{\bar{x}} = 1$.

Z zgornjimi podatki in obrazcem 111 dobimo:

$$n = \left(\frac{1{,}96 \cdot 11{,}0}{1}\right)^2 = 465$$

Da dosežemo predpisano natančnost, moramo vzeti v vzorec 465 dečkov. Jasno je, da po izvedbi vzorca ocenimo zanesljivost podatkov vzorca.

Primer 76. Za dečke, stare okrog 13 let, v Sloveniji cenimo, da dosežejo pri mehanskem testu povprečno $M =$ ca. 33 točk, SD dosežkov pa cenimo na $\sigma = 11{,}0$. Kako velik vzorec moramo vzeti, da se ocena aritmetične sredine dosežkov pri mehanskem testu ne bo razlikovala od prave vrednosti z 1 % rizikom za več kot $e_{\bar{x}}\,\% = 1\,\%$.

Po obrazcu 112 dobimo iz teh podatkov:

$$n = \left(\frac{100 \cdot 2{,}58 \cdot 11{,}0}{1 \cdot 33}\right)^2 = 7396$$

Ker zahtevamo veliko zanesljivost ocene, je velikost vzorca precejšnja. Da dosežemo zaželeno zanesljivost podatkov, je treba po računu vzeti v vzorec ca. 7400 enot.

72.3 Ocenjevanje parametrov na splošno

72.31 Ocena. Distribucija ocen. Standardna pogreška. Podobne zaključke, kot smo jih napravili za aritmetično sredino, moremo napraviti za kateri koli statistični parameter; za druge sredine, mere variacije in korelacije. V vsakem primeru moremo iz podatkov vzorca izračunati oceno parametra populacije, iz ocen parametra vseh možnih vzorcev tvoriti frekvenčno distribucijo ocen, zanje izračunati standardne pogreške in meje zaupanja ocen, ali glede na predpisano zanesljivost ocen izračunati potrebno velikost vzorca.

Za velike vzorce veljajo za ocene katerega koli parametra enake zakonitosti kot za oceno aritmetične sredine. Na splošno namreč velja, da se ocene g katerega koli parametra γ distribuirajo okrog vrednosti parametra v približku normalno, nekatere bolj, druge manj, vendar za vse tako, da jih moremo praktično smatrati kot normalne. Zaradi tega moremo vse, kar smo povedali o ocenjevanju aritmetične sredine, direktno prenesti na ocenjevanje katerega koli parametra z velikim vzorcem.

Če z γ zaznamujemo kateri koli parameter, z g pa oceno tega parametra, dobljeno z velikim vzorcem, moremo na splošno zaključiti:

a) Ocena g parametra γ je nepristrana, če velja obrazec

$$M_g = \gamma \tag{113}$$

b) Standardno pogreško ocene SE moremo na splošno pisati v obliki obrazca

$$SE_g = \frac{G}{\sqrt{n}} \tag{114}$$

pri čemer G pomeni specifičen izraz za posamezni parameter.

c) Standardno pogreško, merjeno v odstotkih $SE_g\%$, izračunavamo po obrazcu

$$SE_g\% = \frac{100\, SE_g}{\gamma} = \frac{100\, G}{\gamma\sqrt{n}} \tag{115}$$

d) Maksimalen odklon ocene od prave vrednosti parametra e_g izračunamo po obrazcu

$$e_g = z \cdot SE_g \tag{116}$$

z pomeni riziku ustrezno vrednost standardiziranega odklona za normalno distribucijo.

Maksimalen odklon, merjen v odstotkih, izračunamo po obrazcu

$$e_g\% = z \cdot SE_g\% \tag{117}$$

e) Meje zaupanja v splošnem dobimo po obrazcu

$$g - e_g < \gamma < g + e_g \tag{118}$$

Ti obrazci vključujejo obrazce ocenjevanja aritmetičnih sredin kot poseben primer: $g = \bar{x}$; $\gamma = M_x$; $G = \sigma_x$.

Tabela 47. **Tabela standardnih pogrešk in faktorjev G za ocene najvažnejših parametrov** (pomen novih simbolov je tolmačen pri primerih) (119)

Parameter	Oznaka ocene	Oznaka parametra	Standardna pogreška	Faktor G	
1. Splošno	g	γ	SE_g	G	
2. Strukturni delež	p	p_o	$SE_p = \frac{\sqrt{p_o(1-p_o)}}{\sqrt{n}}$	$\sqrt{p_o(1-p_o)}$	
3. Strukturni odstotek	$p\,\%$	$p_o\%$	$SE_{p\%} = \frac{\sqrt{p_{o\%}(100-p_{o\%})}}{\sqrt{n}}$	$\sqrt{p_o\%(100-p_o\%)}$	
4. Frekvenca	f	f_t	$SE_f = \sqrt{np_o(1-p_o)}$	$n\sqrt{p_o(1-p_o)}$	
5. Aritm. sredina	$\bar{x}$	M_x	$SE_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n}$	σ	
6. Mediana	Me	Me	$SE_{Me} = 1{,}253\,\sigma/\sqrt{n}$	$1{,}253\,\sigma$	N
7. Kvantil	x_p	x_p	$SE_{x_p} = \frac{1}{y}\sqrt{\frac{p_o(1-p_o)}{n}}$	$\frac{1}{y}\sqrt{p_o(1-p_o)}$	
8. Standard. odkl.	s	SD	$SE_s = \sigma/\sqrt{2n}$	$\sigma/\sqrt{2}$	N
9. Kvartilni razmak	Q	Q	$SE_Q = \frac{0{,}7867\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}166\,Q}{\sqrt{n}}$	$0{,}7867\,\sigma = 1{,}166Q$	N
10. Koeficient asimetrije	As_b	AS_b	$SE_{AS_b} = 0{,}5181\,(P_{90} - P_{10})/\sqrt{n}$	$0{,}5181\,(P_{90} - P_{10})$	N
11. Koef. sploščen.	Spl	Spl	$SE_{Spl} = 0{,}28/\sqrt{n}$	$0{,}28$	
12. Koef. korelacije	r	r_o	$SE_r = (1-r^2)/\sqrt{n-1}$	$\approx 1 - r^2$	N
13. Koef. korelacije ranga	ϱ	ϱ	$SE_\varrho = 1{,}04(1-\varrho^2)/\sqrt{n-1}$	$\approx 1{,}04\,(1-\varrho^2)$	
14. Korelacijsko razmerje	η	η	$SE_\eta = (1-\eta^2)/\sqrt{n-1}$	$\approx 1 - \eta^2$	
15. Biserialni kor. koeficient	r_{bi}	r_{bi}	$SE_{r_{bi}} = \left(\frac{\sqrt{pq}}{y} - r_{bi}^2\right)\Big/\sqrt{n}$	$\left(\frac{\sqrt{pq}}{y} - r_{bi}^2\right)$	N
16. Tetrakorični kor. koeficient	r_t	r_t	$SE_{r_t} = \frac{\sqrt{pqp'q'}}{yy'\sqrt{n}}$	$\frac{\sqrt{pqp'q'}}{yy'}$	N

Opomba: V obrazcih za standardno pogreško SE in faktor G so vzeti parametri, ki jih moremo po potrebi zamenjati z ocenami iz vzorca.

N = predpostavljana je normalna distribucija

Primer 76. Od $n = 500$ po slučajnem načinu izbranih otrok je določeno nalogo uspešno rešilo $n_1 = 300$ otrok. Kakšna je standardna pogreška ocene strukturnega odstotka $p\,\%$, in kakšne so meje zaupanja ocene strukturnega odstotka, če dopustimo $5\,\%$ riziko?

Iz tabele 47/3 in obrazcev 116 in 118 dobimo:

$$p\,\% = 100\,\frac{300}{500} = 60\,\%$$

$$SE_p = \sqrt{\frac{60\,(100 - 60)}{500}} = 2{,}19\,\%; \quad e_p = 1{,}96 \cdot 2{,}19 = 4{,}3\,\%$$

$$60 - 4{,}3 < p_o < 60 + 4{,}3 \qquad 55{,}7\,\% < p_o < 64{,}3\,\%$$

Standardna pogreška je $SE_p = 2{,}19\,\%$, meje zaupanja s $5\,\%$ rizikom pa $55{,}7\,\% <$ $< p_o < 64{,}3\,\%$.

Primer 77. Za rezultate testiranja presojanja urnosti in natančnosti tretješolk v LRS poznamo $SD = 9{,}9$. Kolika bi bila standardna pogreška ocene mediane, ocenjene z vzorcem $n = 1000$ enot.

Iz tabele 47/6 in danih podatkov dobimo:

$$SE_{Me} = \frac{1{,}253 \cdot SD}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}253 \cdot 9{,}9}{\sqrt{1000}} = 0{,}392$$

Standardna pogreška ocene mediane bi bila 0,392.

Primer 78. Iz vzorca z $n = 1167$ enot je bil ocenjen 78. centil C_{78} sposobnosti računanja za četrtošolce v LRS. Dobili smo rezultat $x._{78} = 23{,}78$. Kolike so s $5\,\%$ rizikom meje zaupanja te ocene?

y v obrazcu 47/7 je ordinata distribucije na mestu 78. centila $x._{78}$. To ordinato moremo oceniti iz frekvenčne distribucije po obrazcu

$$y = \frac{f_{0,78}}{n \cdot i}$$

pri čemer je $f_{0,78}$ frekvenca razreda, v katerem leži centil $x._{78}$, i je razredni interval. Iz ustrezajoče frekvenčne distribucije v tabeli 13 dobimo, da je $f_{0,78} = 193$, $i = 4$, $n = 1167$. Iz teh podatkov sledi:

$$y = \frac{193}{1167 \cdot 4} = 0{,}0414$$

S tabelo 47/7 dobimo dalje:

$$SEx._{78} = \frac{1}{0{,}0414}\sqrt{\frac{0{,}78 \cdot (1 - 0{,}78)}{1167}} = 0{,}293$$

$$ex_{.78} = 1{,}96 \cdot 0{,}293 = 0{,}61 \qquad 23{,}78 - 0{,}61 < x_{.78} < 23{,}78 + 0{,}61$$

$$23{,}17 < x_{.78} < 24{,}39$$

Primer 79. Z vzorcem $n = 342$ četrtošolk ljubljanskih gimnazij smo ocenili standardni odklon dosežkov testiranja zmožnosti presojanja mehanskih zmožnosti $s = 10{,}08$. Kolika je standardna pogreška ocene s, merjena v odstotkih od ocene. Po tabeli 47/8 in obrazcu 115 dobimo

$$SE_s\,\% = \frac{SE_s}{s}\,100 = \frac{100}{\sqrt{2 \cdot 342}} = 3{,}8\,\%$$

Standardna pogreška ocene standardnega odklona, izražena v odstotkih od ocene, je $SE_s\,\% = 3{,}8\,\%$.

Primer 80. Za test računskega presojanja četrtošolcev v *LRS* smo iz vzorca $n = 1167$ četrtošolcev ocenili kvartilni odklon $Q = 5{,}22$. Kolika je standardna pogreška te ocene?

Ker ne poznamo standardnega odklona *SD*, moramo iz tabele 47/9 vzeti alternativni obrazec, ki je izdelan po predpostavki normalnosti populacije.

$$SE_Q = \frac{1{,}166 \cdot 5{,}22}{\sqrt{1167}} = 0{,}178; \quad SE_Q\,\% = \frac{100 \cdot 1{,}166}{\sqrt{1167}} = 3{,}4\,\%$$

Primer 81. Iz vzorca $n = 1167$ četrtošolcev v LRS smo pri testiranju računskih zmožnosti dobili, da je koeficient asimetrije ocenjen z $As_b = 0{,}26$, prvi decil z $D_1 = 8{,}79$, deveti decil z $D_9 = 28{,}08$. Kolike so meje zaupanja te mere asimetrije? Po tabeli 47/10 dobimo:

$$SE_{As_b} = \frac{0{,}5181\,(28{,}08 - 8{,}79)}{\sqrt{1167}} = 0{,}564 \qquad e_{As_b} = 1{,}96 \cdot 0{,}564 = 1{,}117$$

$$0{,}26 - 1{,}117 < A_{s_b} < 0{,}26 + 1{,}117 \qquad -0{,}85 < A_{s_b} < +1{,}37$$

Spodnja meja zaupanja je negativna, zgornja pa pozitivna. To kaže na to, da more biti prava vrednost *As* tudi 0. Ni torej izključeno, da je distribucija simetrična.

Primer 82. Koeficient sploščenosti je bil iz istega vzorca kot As_b ocenjen s $Spl = 0{,}270$. Kolik je s 5 % rizika maksimalen možen odklon ocene *Spl* od prave vrednosti? Iz 47/11 in obrazca 116 dobimo:

$$e_{Spl} = z \cdot SE_{Spl} = \frac{z \cdot 0{,}28}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}96 \cdot 0{,}28}{\sqrt{1167}} = 0{,}016$$

Odklon ocenjene vrednosti $Spl = 0{,}270$ od vrednosti 0,263, ki jo ima normalna distribucija, je 0,007. Ta vrednost kaže, da je možno, da je populacija, ki smo jo raziskovali, glede sploščenosti normalna.

Primer 83. Korelacijski koeficient enakovrednih polovic sodih in lihih nalog za mehanski test smo z vzorcem $n = 414$ ljubljanskih dijakov ocenili z $r_{xy} = 0{,}677$ (glej primer 55). Kolika je absolutna in kolika je relativna standardna pogreška ocene r_{xy}?

V tabeli 47/12 najdemo:

$$SE_r = \frac{1 - r^2}{\sqrt{n - 1}} = \frac{1 - 0{,}677^2}{\sqrt{414 - 1}} = 0{,}0267$$

$$SE_r\,\% = \frac{100\,SE_r}{r} = \frac{100 \cdot 0{,}0267}{0{,}677} = 3{,}9\,\%$$

Primer 84. Za isti problem kot v primeru 83 je bil ocenjen biserialni korelacijski koeficient $r_{bi} = 0{,}667$. Oceniti je treba absolutno in relativno standardno pogreško ocene. V obrazcu za standardno pogreško v tabeli 47/15 sta p in q strukturna deleža posameznih grup: $p = 221/414 = 0{,}534$, $q = 1 - 0{,}534 = 0{,}466$. (Glej tabelo 34!) y je ordinata normalne krivulje za $y\,(F = 0{,}5 - p = 0{,}034) = 0{,}3975$. Iz teh podatkov dobimo:

$$SE_{r_{bi}} = \frac{\dfrac{\sqrt{pq}}{y} - r_{bi}^2}{\sqrt{n}} = \frac{\dfrac{\sqrt{0{,}534 \cdot 0{,}466}}{0{,}3975} - 0{,}667^2}{\sqrt{414}} = 0{,}0398$$

$$SE_{r_{bi}}\,\% = \frac{100\,SE_{r_{bi}}}{r_{bi}} = \frac{0{,}0398 \cdot 100}{0{,}667} = 6{,}0\,\%$$

Primer 85. Tetrakorični korelacijski koeficient iz grupiranih podatkov za isti vzorec in problem je $r_t = 0{,}669$ (glej primer 59). V obrazcu za oceno standardne pogreške tetrakoričnega korelacijskega koeficienta v tabeli 47/16 nastopajo naslednje količine: p, q, y, p', q in y'. To so po vrsti: p je strukturni delež po prvem znaku, q je njegov komplement: $q = 1 - p$, y je ordinata normalne distribucije za $y\,(F = 0{,}5 - p)$, p', q' in y' pa so analogne količine za drugi znak. Za naš primer dobimo iz tabele 35 v primeru 59:

$$p = 221/414 = 0{,}534; \quad q = 1 - 0{,}534 = 0{,}466; \quad y\,(F = 0{,}5 - 0{,}466) = 0{,}3975$$

$$p' = 206/414 = 0{,}498; \quad q' = 1 - 0{,}498 = 0{,}502; \quad y'\,(F = 0{,}5 - 0{,}498) = 0{,}3989$$

Če te podatke vstavimo v obrazec za ocenjevanje SE_{r_t}, dobimo:

$$SE_{r_t} = \frac{\sqrt{pq\,p'q'}}{y\,y'\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{0{,}534 \cdot 0{,}466 \cdot 0{,}498 \cdot 0{,}502}}{0{,}3975 \cdot 0{,}3989\sqrt{414}} = 0{,}0744$$

ali v odstotkih:

$$SE_{r_t}\,\% = \frac{100\,SE_{r_t}}{r_t} = \frac{100 \cdot 0{,}0774}{0{,}669} = 11{,}6\,\%$$

Primerjava standardnih pogrešk Pearsonovega ($SE_r = 0{,}0267$), biserialnega ($SE_{r_{bi}} = 0{,}0398$) in tetrakoričnega ($SE_{r_t} = 0{,}0744$) korelacijskega koeficienta pokaže, da je najzanesljivejša ocena s Pearsonovim koeficientom, najmanj pa s tetrakoričnim koeficientom. To je razumljivo, ker prvi izkorišča največ, zadnji pa najmanj informacij iz vzorca.

Primer 86. Korelacijsko razmerje η^2 za iste podatke kot v prejšnjih primerih je $\eta^2 = 0{,}459$. Standardna pogreška ocene je po tabeli 47/14 enaka

$$SE\eta = \frac{1 - \eta^2}{\sqrt{n - 1}} = \frac{1 - 0{,}459}{\sqrt{414 - 1}} = 0{,}0267$$

Rezultat se sklada z rezultatom, ki smo ga dobili za Pearsonov korelacijski koeficient, ker sta r^2 in η^2 približno enaka. Zelo podobna pa sta si tudi obrazca za ocenjevanje standardnih pogrešk.

Primer 87. Za povezavo med rezultati mehanskega in spacialnega testa 20 dijakov smo iz vzorca 20 dijakov v primeru 62 izračunali Spearmanov koeficient korelacije $\varrho = 0{,}784$. Oceniti je treba absolutno in relativno standardno pogreško ocene ϱ. Po tabeli 47/13 dobimo:

$$SE\varrho = \frac{1{,}04\,(1 - \varrho^2)}{\sqrt{n - 1}} = \frac{1{,}04\,(1 - 0{,}784^2)}{\sqrt{20 - 1}} = 0{,}0917$$

$$SE\varrho\,\% = \frac{100\,SE\varrho}{\varrho} = \frac{100 \cdot 0{,}0917}{0{,}784} = 11{,}7\,\%$$

Standardno pogreško za ta primer smo izračunali zaradi vaje, čeprav njegovo izračunavanje ni povsem upravičeno, ker je vzorec z $n = 20$ enotami šteti kot majhen.

S temi primeri smo izčrpali ocenjevanje zanesljivosti ocen vseh važnejših parametrov.

72.32 Velikost vzorcev. Velikost vzorca, s katerim ocenjujemo parametre s predpisano zanesljivostjo, moremo določiti po obrazcu

$$n = \left(\frac{z \cdot G}{e_g}\right)^2 \tag{120}$$

če imamo predpisan maksimalen dopusten odklon absolutno e_g, in po obrazcu

$$n = \left(\frac{100 \cdot z \cdot G}{\gamma\, e_g\,\%}\right)^2 \tag{121}$$

če je maksimalno dopusten odklon dan v odstotkih od ocenjevanega parametra $e_g\,\%$. Obrazca sta splošna, faktor G za posamezne parametre pa najdemo v tabeli 47.

Primer 88. Iz prejšnjih raziskav vemo, da je približna vrednost korelacijskega koeficienta med sodimi in lihimi nalogami v testu mehanskega presojanja 0,70. Kako velik vzorec bi morali vzeti, da bi z njim mogli oceniti korelacijski koeficient tako, da s 5 % rizikom ocena korelacijskega koeficienta ne bi bila različna od prave vrednosti za več kot 5 %?

Iz tabele 47/12 dobimo, da je $G_r \approx 1 - r^2 = 1 - 0{,}70^2 = 0{,}51$. Če to vrednost skupno z drugimi podatki vnesemo v obrazec 121, dobimo potrebno velikost vzorca

$$n = \left(\frac{100 \cdot 1{,}96 \cdot 0{,}51}{0{,}70 \cdot 5}\right)^2 = 819$$

72.322 Obrazca 120 in 121 za določanje velikosti vzorca sta uporabna vse dotlej, dokler opazujemo en sam znak in ocenjujemo en sam parameter. Vendar je takih primerov raziskav malo. Običajno iz vsebinskih in tehničnih razlogov z istim vzorcem ocenjujemo več kompleksno vezanih znakov in zanje ocenjujemo najrazličnejše parametre. Za vsak parameter moremo glede na predpisano zanesljivost ocene izračunati potrebno število enot vzorca. Ta števila enot bi bila med seboj različna glede na različno variabilnost znakov in parameter, katerega ocenjujemo. Vprašanje je, katerega od teh n bomo vzeli kot število enot vzorca, katerega bomo dejansko izvedli. Splošnega pravila za to ni. Če izmed vseh izberemo n, ki je od priporočenih največji, bomo za vse ocenjevane podatke dobili zanesljivost, ki bo v splošnem večja od predpisane. To pa se more pokazati kot nerentabilno. Običajno se ravnamo v takih primerih po znakih, ki so za raziskovanje ključni — najvažnejši, od teh pa izberemo največje ali pa povprečno velikost vzorca n. Vprašanje velikosti vzorca rešujemo od primera do primera, glede na potrebe in možnosti izvedbe, različno.

72.4 **Ocenjevanje diferenc iz dveh neodvisnih vzorcev**

Osnova statistične analize je primerjava parametrov, ki smo jih izračunali iz različnih populacij pod spremenjenimi pogoji. Iz te primerjave je viden vpliv spremenjenih pogojev na parameter oziroma na lastnosti populacije. Razlika med povprečnim številom točk, ki so jih dosegli pri določenem testiranju dečki in deklice, pokaže razliko v zmožnosti po spolu. Razlika standardnih odklonov kot merila individualnih vplivov pokaže, koliko je ta učinek različen med mestno in kmečko mladino in podobno.

Primerjavo parametrov izvedemo tako, da poiščemo razlike med parametri. To razliko moremo oceniti z vzorčenjem tako, da iz vsake izmed primerjanih populacij izberemo samostojen vzorec, iz podatkov vzorcev ocenimo primerjani parameter za vsako izmed obeh populacij, razlika ocen pa je ocena razlike med parametri. V obliki splošnih obrazcev moremo pisati razliko parametrov po naslednjem obrazcu

$$\delta_\gamma = \gamma_2 - \gamma_1 \tag{122}$$

oceno razlik parametrov pa po obrazcu

$$d_g = g_2 - g_1 \tag{123}$$

Pri tem pomeni γ_1 vrednost parametra, g_1 pa oceno parametra za prvo populacijo, γ_2 vrednost parametra za drugo, g_2 pa oceno parametra za drugo populacijo. δ_γ je razlika parametrov, ki pokaže jakost vpliva spremenjenih osnovnih pogojev na parameter, d_g pa je ocena razlik parametrov.

Vzorca, s katerima ocenjujemo g_1 in g_2, sta običajno med seboj neodvisna. To pomeni, da izbor v drugi populaciji ni odvisen od izbora v prvi populaciji. V tem primeru pravimo, da sta tudi oceni g_1 in g_2 neodvisni.

Ker je ocena razlik med parametri izračunana iz slučajnih vzorcev, zanje veljajo vse zakonitosti slučajnih vzorcev. Možnih ocen razlik med parametri je veliko, iz njih moremo sestaviti frekvenčno distribucijo, izračunati standardno pogreško in meje zaupanja. Enako kot za ocene parametrov velja tudi za ocene diferenc, da je distribucija razlik neodvisnih ocen distribuirana — če je vzorec zadosti velik — v normalni distribuciji. Standardno pogreško razlike dveh neodvisnih ocen parametra izračunamo iz standardnih pogrešk ocene parametra za posamezno populacijo po enostavnem obrazcu

$$SE^2_{dg} = SE^2_{g_1} + SE^2_{g_2} \tag{124}$$

kot vsoto kvadratov standardnih pogrešk obeh neodvisnih ocen. Ta obrazec je splošen in velja za ocenjevanje standardnih pogrešk razlik vseh parametrov, samo da oceni izpolnjujeta pogoj, da sta neodvisni.

Primer 89. Oceniti hočemo razliko računskih zmožnosti med tretješolci in četrtošolci. Za ta namen smo slučajno izbrali vzorec 400 tretješolcev in vzorec 600 četrtošolcev. Izbrane dijake smo testirali s testom računskih zmožnosti in dobili naslednje rezultate.

Prvi vzorec: tretješolci .... $n_1 = 400$; $\bar{x}_1 = 11{,}1$; $s_1 = 5{,}6$

Drugi vzorec: četrtošolci ..... $n_2 = 600$; $\bar{x}_2 = 18{,}2$; $s_2 = 7{,}3$

$$d_{\bar{x}} = \bar{x}_2 - \bar{x}_1 = 18{,}2 - 11{,}1 = 7{,}1$$

Po obrazcu 124 in tabeli 47/5 dobimo dalje:

$$SE^2_d = SE^2_{\bar{x}_1} + SE^2_{\bar{x}_2} = \frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2} = \frac{5{,}6^2}{400} + \frac{7{,}3^2}{600} = 0{,}167$$

$$SE_d = \sqrt{SE_d^2} = \sqrt{0{,}167} = 0{,}41; \quad e_d = z \cdot SE_d = 1{,}96 \cdot 0{,}41 = 0{,}80$$

$$d_{\bar{x}} - e_d < \delta_M < d_{\bar{x}} + e_d \qquad 7{,}1 - 0{,}8 < \delta_M < 7{,}1 + 0{,}8 \qquad 6{,}3 < \delta_M < 7{,}9$$

Ocena razlike med tretješolci in četrtošolci v računskih zmožnostih je $d_{\bar{x}} = 7{,}1$. Standardna pogreška ocene razlik je $SE_d = 0{,}41$, prava vrednost razlike v zmožnostih pa je s 5 % rizikom med 6,3 in 7,9.

Primer 90. Ocenimo na osnovi vzorca iz primera 89 še razliko individualnih vplivov, ki jih merimo s standardnimi odkloni.

Iz zgornjega primera potrebujemo naslednje podatke:

Prvi vzorec: tretješolci .... $n_1 = 400$; $s_1 = 5{,}6$
Drugi vzorec: četrtošolci ..... $n_2 = 600$; $s_2 = 7{,}3$

Ocena razlik standardnih odklonov je

$$d_s = s_2 - s_1 = 7{,}3 - 5{,}6 = 1{,}7$$

standardna pogreška ocene razlik pa je po obrazcu 124 in tabeli 47/8 enaka:

$$SE_{d_s}^2 = SE_{s_1}^2 + SE_{s_2}^2 = \frac{s_1^2}{2n_1} + \frac{s_2^2}{2n_2} = \frac{5{,}6^2}{2 \cdot 400} + \frac{7{,}3^2}{2 \cdot 600} = 0{,}0835$$

$$SE_{d_s} = \sqrt{0{,}0835} = 0{,}289; \quad e_{d_s} = z \cdot SE_{d_s} = 1{,}96 \cdot 0{,}289 = 0{,}57$$

$$d_s - e_d < \delta_\sigma < d_s + e_d \qquad 1{,}7 - 0{,}57 < \delta_\sigma < 1{,}7 + 0{,}57 \qquad 1{,}13 < \delta_\sigma < 2{,}27$$

Razlika standardnih odklonov je ocenjena z $d_s = 1{,}7$, standardna pogreška te ocene je $SE_{d_s} = 0{,}289$. Prava vrednost razlik v standardnih odklonih pa je v mejah med 1,13 in 2,27 (z rizikom 5 %).

72.5 Tehnika slučajnega izbora vzorca

Teorija vzorčenja z vsemi posledicami, ki jih ima v praktičnem izvajanju, velja pod osnovnim pogojem, da so enote vzorca izbrane slučajno. Slučajen izbor zagotovi vsaki enoti populacije enako možnost, da je izbrana v vzorec. S tem v zvezi se vprašamo, kako praktično izbrati enote vzorca iz populacije, da bo slučajnost izbora zagotovljena. Načinov slučajnega izbora je več.

72.51 Loterijski način. Loterijski način je eden izmed načinov, s katerim moremo izbrati vzorec. Po tem principu bi morali imeti v loterijskem bobnu vse enote populacije in iz njega na slepo izbirati enote toliko časa, da število izbranih enot ustreza velikosti vzorca. Praktično to izvedemo tako, da enote populacije oštevilčimo z zaporednimi številkami, v loterijskem bobnu pa imamo toliko oštevilčenih listkov, kolikor je enot populacije. Iz loterijskega bobna na slepo vlečemo listke, v vzorec pa vzamemo vse enote, ki imajo ustrezajoče zaporedne številke. Čeprav je ta način na prvi pogled preprost, je tehnično zamuden in neprikladen.

72.52 Tablice slučajnih števil. Tehnično prikladnejša, vsebinsko pa enakovredna metoda je uporaba tablic slučajnih številk. Tablica slučajnih številk je tabela številk od 0 do 9, ki so bile izbrane slučajno in zapisane tako, da jih moremo uporabljati pri različnih primerih, ne da bi bilo treba vlečenje tehnično ponavljati. V dodatku imamo v tabeli H dano tablico slučajnih števil, ki jo uporabljamo, kot kaže naslednji primer.

Primer 91. Vzemimo, da ima populacija $N = 836$ enot. Iz nje moramo slučajno izbrati 13 enot. Ker je število enot v populaciji $N = 836$ trimestno število, bodo v tablici slučajnih številk skupine po tri številke tvorile po eno slučajno število. V vzorec bodo prišle vse enote, ki imajo zaporedne številke, kot jih bomo odbrali iz tablic slučajnih številk. Začnimo slučajne številke določati od začetka tablice. Prva vrsta slučajnih številk v tablici je:

5354 9142 0847 5393 5416 6505 7156 5634 9703 6221

Iz te vrste slučajnih številk dobimo po vrsti naslednja tromestna števila: 535, 491, 420, 847, 539, 354, 166, 505, 715, 656, 349, 703, 622. Od teh pridejo v poštev vsa tromestna števila razen 847, ker je večje, kot je število enot v populaciji. V vzorec izberemo enote, ki imajo dobljene zaporedne številke.

Tablice slučajnih številk moremo bolje izkoristiti, če grupo po tri številke pomikamo po eno mesto naprej in vzamemo te grupe kot slučajna števila. Iz zgornje vrste zaporednih številk dobimo tako naslednja tromestna slučajna števila: 535, 354, 549, 491, 914, 142, 420 itd. Tako moremo iz iste vrste dobiti 38 tromestnih slučajnih števil namesto 13, kolikor smo jih dobili po prvem sistemu.

Slučajne številke moremo brati tudi v obratni smeri, od zgoraj navzdol ali od spodaj navzgor. Zaradi teh možnosti je kapaciteta že tako majhne tablice, kot je naša, zadostna za praktično uporabo.

Če uporabljamo tablice slučajnih števil za izbor enot, moramo obvezno imeti izdelan okvir vzorčenja. Okvir vzorčenja je seznam enot populacije, zaznamovanih z zaporednimi številkami. Okvir je dan bodisi s spiskom, kartoteko, geografsko karto z vrisanimi enotami populacije ali drugače.

72.53 Sistematičen izbor. Kljub svojim prednostim pa je tablica slučajnih številk v praktičnih primerih dostikrat vseeno preokorna. Zahteva, da imamo okvir vzorčenja v celoti dan, je včasih težko izvedljiva, ker je populacija velika, geografsko raztresena in podobno. Pod določenimi pogoji moremo izbrati vzorec, ki ga moremo smatrati praktično tudi za slučajnega, razmeroma laže. Če moramo na primer izbrati v vzorec 10 % enot populacije, moremo teh 10 % enot dobiti tako, da vzamemo v vzorec vsako deseto enoto po vrstnem redu, kot so razvrščene.

Ta način, ki ga imenujemo sistematičen izbor, je tehnično veliko preprostejši kot izbor s pomočjo tablic slučajnih števil. Ima pa to slabo lastnost, da ga ne moremo smatrati v vsakem primeru kot slučajnega. Če je v vrstnem redu kakšna zakonitost ponavljanja enot z določenimi značilnostmi, tak vzorec ni reprezentativen in ga ne moremo smatrati za osnovo ocenjevanja.

72.54 Izbor s pomočjo datuma rojstva. Razen sistematičnega vzorca imamo še druge načine, s katerimi si olajšamo tehnični posel izbora enot vzorca. Eden izmed takih načinov je izbor s pomočjo datuma rojstva, ki ga moremo uporabljati za populacije oseb. Predpostavljati moremo, da dan rojstva ni faktor, ki vpliva na pojave, ki so v zvezi s proučevanimi osebami. Če postavimo princip, da na primer v vzorec učencev vzamemo vse učence, rojene 14. v mesecu katerega koli meseca ali leta, moremo smatrati ta vzorec kot slučajen, če proučevani podatek ni odvisen od datuma rojstva. To pa moremo za večino znakov predpostavljati. Ta način se izkaže v mnogih primerih kot zelo prikladen, ker ne predpostavlja centralnega seznama enot, kot je to primer pri večini drugih sistemov, datum rojstva pa je podatek, ki ga iz evidenčnih razlogov dobimo povsod.

Primer 92. Kot primer izbora s pomočjo datumov navajamo anketo o zdravstvenih, socialnih in kulturnih razmerah učencev osnovnih šol v LR Sloveniji v letu 1957. Po pravilu izbora so bili anketirani vsi učenci osnovnih šol, rojeni 6., 16. ali 26. katerega koli meseca ali leta. Tehnika izbora je bila s tem zelo poenostavljena. Ni bil potreben predhoden spisek, niti centralni izbor. Vsak učitelj je za svoj razred po matičnih listih učencev izbral učence svojega razreda, rojene na odrejene datume.

72.55 Vzorec iz hipotetične populacije. Za hipotetične populacije poizkusov, testov oziroma dogodkov pod enakimi pogoji, smatramo kot slučajen vzorec skupnost vseh poizkusov, testov ali dogodkov, ki smo jih izvršili oziroma so se zgodili. Tako moremo smatrati 35 učencev razreda, v katerem smo testiranli, kot slučajen vzorec iz hipotetične populacije vseh učencev, ki bi živeli pod istimi pogoji kot testirani.

72.6 Pristranost ocen

Kot smo videli iz različnih metod izbiranja enot vzorcev, so nekateri postopki izbora taki, da vzorec ne moremo smatrati kot reprezentanta populacije. Taki vzorci dajejo pristrane ocene. Pristranost ocene more izvirati iz več vzrokov: a) iz načina izbora, ki ni zagotovil slučajnosti in enake možnosti izbora vseh enot, b) iz obrazca ocenjevanja parametra in c) iz tehnike anketiranja.

Kot nepristrano oceno smatramo oceno, za katero je aritmetična sredina vseh možnih ocen enaka ocenjevanemu parametru.

72.61 Pristranost zaradi izbora. Poglejmo najprej primere pristranosti zaradi izbora, ki bodo osvetlili problematiko tega vprašanja.

Primer 93. Izvesti hočemo anketo o javnem mnenju prebivalstva o določenem problemu. Ker nimamo na razpolago seznama prebivalstva, vzamemo telefonski imenik in anketiramo slučajno izbrane privatnike, ki imajo telefon. Na prvi pogled je jasno, da ta vzorec ne reprezentira prebivalstva, ker bomo dobili predvsem mestno prebivalstvo in še tu samo nekatere socialne skupine. Rezultati, ki bi jih dobili tako, bi bili pristrani.

Primer 94. Anketo, v katero smo vključili določeno število slučajno izbranih gospodinjstev, smo izvedli v dopoldanskih urah in anketirali vse osebe, ki smo jih v tem času dobili doma. Tudi ta vzorec bo dal pristrane rezultate, čeprav je bil vzorec gospodinjstev slučajen, ker smo v vzorec dobili večinoma gospodarsko neaktivne člane gospodinjstev, upokojence, gospodinje, otroke, bolnike in podobno.

Primer 95. Izvedli smo anketo o stanovanjskih razmerah prebivalstva. Za ta namen smo po pošti poslali slučajno izbranim gospodinjstvom pismo s prošnjo, da izpolnijo priloženi obrazec in ga izpolnjenega vrnejo v priloženi frankirani kuverti na naslov izvajalca ankete. Od skupnega števila poslanih pisem pa smo dobili odgovore samo na 70 %. Ker smo s tem vnaprej računali, smo izbrali toliko več gospodinjstev in poslali toliko več pisem, da smo dosegli predpisano velikost vzorca. Kljub tej opreznosti rezultati tega vzorca niso uporabni, ker je vzorec pristran. Vzorec se je popačil, ker so na pismo odgovorili predvsem tisti, ki žive v slabih stanovanjskih razmerah, ljudje, ki so bolj disciplinirani, za razliko od skupine oseb, ki podatkov ni poslala, ker živijo v dobrih stanovanjih in jih to vprašanje ne zanima. Vzorec se je sam od sebe selekcioniral in ne predstavlja populacije.

Primer 96. Iz istega vzroka dajo pristrane rezultate ankete, ki jih prirejajo redakcije časopisov tako, da anketna vprašanja objavijo v časopisu s prošnjo na bralce, da na vprašanja odgovore in odgovore pošljejo uredništvu. Da bi bil odziv večji, razpišejo nagrade. Predvsem tak vzorec ne reprezentira vsega prebivalstva, temveč samo bralce lista, ki izvaja anketo. To ima za rezultat bodisi selekcioniranost po političnem vidiku, če je časopis politično usmerjen, ali selekcioniranost v pogledu zanimanja, če je časopis športen, zabaven, ženski itd. Če vzamemo, da je anketo razpisal športni tednik, predstavlja krog bralcev samo prebivalstvo, ki se zanima za športne dogodke, ne pa celotno prebivalstvo. Prejeti odgovori pa ne predstavljajo niti te populacije, ker bodo na anketna vprašanja odgovorili predvsem ekstremi — tisti, ki se z rešitvijo problema povsem ne strinjajo, in tisti, ki so s to rešitvijo zadovoljni, medtem ko bo na anketo odgovarilo manj povprečnih bralcev.

Primer 97. Tudi sistematičen izbor dá pristrane rezultate, če je v vrstnem redu enot kaka zakonitost ponavljanja. Vzemimo kot primer spisek oseb, pisan po vrstnem redu v družinah: najprej oče, nato mati in otroci oziroma drugi člani družine. Da v potencirani obliki prikažemo efekt pristranosti sistematičnega izbora, vzemimo, da so vse družine v populaciji enakega sestava: oče, mati, trije drugi člani po starosti. Po tem vrstnem redu so tudi pisani v spisku.

Po pravilu sistematičnega izbora najprej slučajno izberemo prvo enoto vzorca, od te pa naprej vsako deseto, če je vzorec na primer 10 %. Skicirajmo zaporedje enot v spisku z oznakami: M = mož, Ž = žena, O = otrok oziroma drug član:

MŽOOOMŽOOOMŽOOOMŽOOOMŽOOOMŽOOOMŽOOOMŽOOOMŽOOO

Izbor smo začeli z drugo enoto po spisku. V skici spiska so podčrtane enote, ki so prišle v vzorec z 10 % sistematičnim izborom. Vidimo, da smo v vzorec izbrali same žene, z vsemi posledicami, ki jih ima tak izbor na rezultate.

V praktičnih primerih efekt pristranosti sistematičnega izbora ni tako močan kot v zgornjem primeru. Vendar je v vseh primerih sistematičnega izbora dana potencialna možnost, da taka periodičnost — čeprav v omiljeni obliki — eksistira. Zaradi tega je treba vselej, kadar nameravamo uporabiti sistematičen izbor, pred uporabo podrobno analizirati vrstni red v spisku enot, ki rabi kot okvir izbora.

72.62 **Pristranost zaradi obrazca ocenjevanja.** Dostikrat pristranost ne izvira iz izbora, temveč iz obrazca, s katerim ocenjujemo parameter.

Primer 98. Tipičen primer za te vrste pristranosti je ocenjevanje variance. Ocena variance, izračunana iz podatkov vzorca po obrazcu izračunavanja variance populacije,

$$s_x^2 = \frac{S(x - \bar{x})^2}{n} \tag{125}$$

daje pristrane ocene variance.

Nepristrano oceno variance dobimo po obrazcu

$$s^2 = \frac{S(x - \bar{x})^2}{n - 1} \tag{126}$$

ker je le v tem primeru $M_{s^2} = \sigma^2$.

Primer 99. Kot drug primer pristranega obrazca ocenjevanja vzemimo naslednji problem. V vzorec, s katerim hočemo oceniti povprečno potrošnjo alkohola na osebo, smo slučajno izbrali določeno število gospodinjstev, v izbranih gospodinjstvih pa po enega člana, ki smo ga anketirali. Izbor je v celoti slučajen. Slučajno so bila izbrana gospodinjstva in slučajno so bile izbrane osebe v gospodinjstvih. Po običajnem obrazcu ocenjevanja aritmetične sredine bi podatke o potrošnji alkohola vseh anketiranih oseb sešteli, vsoto pa delili s skupnim številom vseh anketiranih oseb.

$$\bar{x}' = \frac{Sx}{n} \tag{127}$$

Vendar bi bila ta ocena pristrana, kljub temu da je izbor slučajen in obrazec znan kot obrazec nepristranega ocenjevanja aritmetične sredine. Analiza populacije namreč pokaže, da smo v izbranih gospodinjstvih z enim članom dejansko anketirali, s tem da smo anketirali po enega, vse člane, v izbranih gospodnjstvih z dvema članoma polovico, v izbranih gospodinjstvih s tremi člani samo eno tretjino vseh članov in tako dalje. Glede na to moramo potrošnjo alkohola na prebivalca ocenjevati z obrazcem

$$\bar{x}'' = \frac{\Sigma k \cdot X_k}{\Sigma k \cdot n_k} \tag{128}$$

in ne obrazcem 127, da to nesorazmerje paraliziramo in dobimo nepristrano oceno $\bar{x}''$.

Pri tem pomeni: k = število članov gospodinjstev ($k = 1, 2, 3 \ldots$); X_k = = skupna potrošnja alkohola vseh anketirancev v gospodinjstvih s k-člani; n_k = število anketiranih gospodinjstev s k člani.

72.63 Pristranosti nevzorčne narave. Tretja vrsta pristranosti, ki običajno nastopa pri ocenjevanju, izvira iz slabih in pomanjkljivih definicij, tendenc anketirancev k dajanju napačnih podatkov, slabega dela anketerjev in tako dalje. Ti vzroki pristranosti pa niso vzorčne narave, temveč se prav tako pojavljajo tudi v popisih, največkrat celo v potencirani meri. Zato je prednost vzorčenja med drugim tudi v tem, da moremo zaradi tega, ker je število enot vzorca običajno v primerjavi s številom enot v populaciji zelo majhno, poskrbeti, da nevzorčne vzroke pristranosti zreduciramo na najmanjšo mero. To dosežemo s selekcijo in dobro instruktažo anketerjev, večjim poudarkom na resničnosti podatkov in tako dalje. Velja namreč pravilo: boljša je »dobra ocena«, kot slab »pravi rezultat«.

72.7 Stratificirano vzorčenje

72.70 Problem. Standardna pogreška, ki je merilo zanesljivosti ocene, je v večini primerov odvisna od variacije pojava in velikosti vzorca. Na velikost standardne pogreške smo do sedaj mogli vplivati le tako, da smo spreminjali velikost vzorca, ker variabilnosti nismo mogli spreminjati.

Variabilnost nehomogene populacije je zelo velika. Zaradi tega so ocene iz nehomogenih populacij malo zanesljive. Iz tega se je rodila ideja, da dobimo zanesljivejšo oceno, če nehomogeno populacijo razdelimo v več homogenih populacij — *stratumov*, v katerih je variabilnost manjša in zaradi tega zanesljivost ocen večja. Iz ocen vrednosti parametra v stratumih pa sestavimo oceno za populacijo.

Primer 100. V vzorcu srednješolske mladine DAT v LRS 1957 je vsebinska analiza nakazala tole stratifikacijo. V pilotnem vzorčenju so se pokazale kot značilne razlike v zmožnostih med učenci nižjih in popolnih gimnazij iz razumljivega razloga — različnega okolja (mesto — dežela). Tudi regionalni kriterij je bil odločilen, ker je bilo pričakovati razlike v zmožnostih za posamezne predele Slovenije. Zaradi tega sta bila za vzorec tretješolcev in četrtošolcev formirana dva glavna stratuma:

dijaki nižjih in dijaki popolnih gimnazij. V stratumu nižje gimnazije so bili po regionalnem kriteriju in velikosti šole sestavljeni podstratumi po pet šol. Iz teh podstratumov je bila slučajno izbrana po ena šola (20 % vzorec šol). V glavnem stratumu popolnih gimnazij pa sta bili po istem — regionalnem kriteriju — združeni v podstratume po dve šoli, izmed katerih je bila v vsakem podstratumu slučajno izbrana po ena šola (50 % vzorec šol). Projekt vzorca za peti razred gimnazij in prvi letnik strokovnih in vajenskih šol je še bolj upošteval stratifikacijo, ker je v tem letniku izvršena selekcija učencev v posamezne šole. Zaradi tega smo formirali po tipih šole naslednje stratume: peti razred popolnih gimnazij, strokovne srednje šole, industrijske strokovne šole s praktičnim poukom, vajenske šole za različne stroke in vajenske šole za posebne stroke; skupno torej pet glavnih stratumov.

72.71 Izračunavanje stratificiranih ocen. S stratificiranim vzorcem izračunavamo oceno *aritmetične sredine* $\bar{x}_{str}$ tako, da s samostojnimi neodvisnimi vzorci v posameznih stratumih ocenimo aritmetične sredine $\bar{x}_k$ v stratumih, oceno skupne aritmetične sredine $\bar{x}_{str}$ pa izračunamo kot tehtano aritmetično sredino ocen po stratumih. Pri tem vzamemo število enot v posameznih stratumih N_k kot pondere.

$$\bar{x}_{str} = \frac{\Sigma N_k \cdot \bar{x}_k}{\Sigma n_k} \tag{129}$$

V obrazcu 129 pomeni znak Σ seštevanje stratumov.

Oceno strukturnega deleža p_{str} dobimo s stratificiranim vzorcem podobno kot aritmetično sredino. S samostojnimi neodvisnimi vzorci v posameznih stratumih ocenimo strukturni delež po stratumih p_k, oceno skupnega strukturnega deleža p_{str} pa izračunamo kot tehtano aritmetično sredino ocen po stratumih. Število enot v posameznih stratumih N_k vzamemo kot pondere. V obrazcu

$$p_{str} = \frac{\Sigma N_k \cdot p_k}{\Sigma N_k} \tag{130}$$

ocenjevanja stratificirane ocene strukturnega deleža pomeni Σ seštevanje stratumov.

Standardno pogreško ocene aritmetične sredine s stratificiranim vzorčenjem $SE^2_{\bar{x}_{str}}$ izračunavamo po obrazcu

$$SE^2_{\bar{x}_{str}} = \sum \frac{N_k^2}{N^2} \cdot \frac{\sigma_k^2}{n_k} \tag{131}$$

standardno pogreško ocene strukturnega deleža $SE_{p_{str}}$ pa po obrazcu

$$SE^2_{p_{str}} = \sum \frac{N_k^2}{N^2} \cdot \frac{p_k(1 - p_k)}{n_k} \tag{132}$$

Razen že znanih izrazov v obrazcih pomeni σ_k^2 varianco znaka v stratumih, $N = \Sigma N_k$ pa skupno število enot v celotni populaciji.

Stratifikacija po pravilu daje manjše standardne pogreške kot enostavno vzorčenje. Čim večje so te razlike, tem uspešnejša je stratifikacija.

72.72 Razmestitev enot stratificiranega vzorca. Če imamo dano skupno število enot vzorca n, je vprašanje, koliko enot od skupnega števila enot naj vzamemo v posameznih stratumih. Izkaže se namreč, da zanesljivost ocene s stratificiranim vzorcem ni odvisna samo od skupnega števila enot v vzorcu, temveč tudi od razmestitve po posameznih stratumih. Ena razmestitev da boljše, druga slabše oziroma manj zanesljive ocene. Optimalno razmestitev glede na velikost N_k stratumov, variabilnost po posameznih stratumih σ_k in stroške za anketiranje enote v posameznih stratumih c_k dobimo po obrazcu

$$n_k = H \frac{N_k \cdot \sigma_k}{\sqrt{c_k}} \tag{133}$$

H v tem obrazcu je konstanta, ki jo izračunamo po obrazcu

$$H = \frac{n}{\sum \frac{N_k \cdot \sigma_k}{\sqrt{c_k}}} \tag{134}$$

Če ne vzamemo v obzir različnih stroškov z anketiranjem po posameznih stratumih, ker so enaki, ali jih ne poznamo, se obrazca 133 in 134 poenostavita v obrazec

$$n_k = H_1 N_k \sigma_k; \quad H_1 = \frac{n}{\Sigma N_k \sigma_k} \tag{135}$$

Če iz istih razlogov kot za stroške, opustimo iz računa še variabilnost, pa preideta v obrazec

$$n_k = H_2 N_k; \quad H_2 = \frac{n}{\Sigma N_k} \tag{136}$$

Primer 101. Vzemimo shematičen primer populacije s tremi stratumi: A, B, C. Podatki, potrebni za izračunavanje razmestitve skupnega števila enot vzorca $n = 800$ med stratume, so dani v tabeli 48.

Tabela 48. Optimalna razmestitev skupnega števila enot vzorca $n = 800$ med stratume

Stratum k	N_k	σ_k	c_k	$\frac{N_k \sigma_k}{\sqrt{c_k}}$	n_k
A	3000	1	1,00	3000	109
B	3900	3	1,69	9000	327
C	5500	2	1,21	10000	364
				22000	800

Račun je izveden po obrazcu 133 in 134

$$H = \frac{800}{22000} = 0,0364$$

72.8 **Vzorčenje v več stopnjah**

Enostaven slučajen vzorec ima teoretske prednosti, od katerih se pa nekatere izkažejo v praktičnem delu kot ovira. Vzemimo, da iz populacije tretješolcev v Sloveniji izberemo slučajno 1500 dijakov, katere smo testirali zaradi sestavljanja testnih norm. S stališča reprezentativnosti je čisti slučajni izbor dal idealno stanje. Učenci, ki jih bomo testirali, so razporejeni po vsej Sloveniji, verjetno v zelo velikem številu šol, če že ne v vseh. S stališča reprezentativnosti vzorca in kvalitete ocene je to stanje ugodno. Ni pa ugodno s tehničnega vidika. Tehnična izvedba vzorčnega testiranja je v tem primeru izredno otežkočena, ker je treba obiskati veliko število šol, od teh dosti zaradi testiranja enega samega ali nekaj dijakov, s tem izgubljati čas, ker v splošnem testiranje manjšega ali večjega števila testirancev traja enako dolgo. S tehničnega vidika bi bilo mnogo ugodneje, če bi bilo treba obiskati manjše število šol, čeprav bi bilo skupno število dijakov, ki jih moramo testirati, večje. To vprašanje reši vzorčenje v več stopnjah. Po tem principu izberemo najprej vzorec enot prve stopnje (v našem primeru šole), v izbranih enotah prve stopnje pa zopet slučajno enote druge stopnje (v našem primeru dijake). Tako uspemo, da osnovne enote — enote druge stopnje skoncentriramo na razmeroma majhnem številu enot prve stopnje. Dobiček je očit. Potni stroški in zamuda časa se znatno skrčita, ne glede na to, da moramo v skupnem testirati veliko število dijakov, da dobimo enako kvalitetne rezultate kot s čisto slučajnim izborom. Tudi v pripravi okvira vzorčenja je prihranek na delu precejšen. Namesto spiska vseh tretješolcev v Sloveniji, ki bi ga potrebovali za enostaven slučajen izbor, je v primeru, da to vprašanje rešujemo z vzorčenjem v dveh stopnjah, treba imeti spisek srednjih šol v Sloveniji kot okvir za izbor v prvi stopnji. Spiske tretješolcev pa potrebujemo samo za šole, izbrane v vzorec v prvi stopnji.

Primer 102. Vzorec za sestavljanje DAT norm za srednješolsko mladino v LR Sloveniji v letu 1957 je bil vzorec v treh stopnjah. Enote prve stopnje so bile gimnazije. Od skupno 299 gimnazij je bilo v vzorec slučajno izbranih 51 šol. Ta vzorec 51 šol je rabil za vzorec tretješolcev in četrtošolcev. S tem smo dodatno prihranili na stroških poti in administriranja, ker je ista ekipa testirala hkrati v tretjem in četrtem razredu. Kot enote druge stopnje je bilo v 51 šolah izbranih 93 oddelkov tretjega in 78 oddelkov četrtega razreda. V teh oddelkih pa so bili izbrani dijaki, ki so bili testirani. Po planu vzorčenja naj bi vzorec tretješolcev obsegal ca. 1700, vzorec četrtošolcev pa ca. 1550 dijakov.

73. Mali vzorci

Iz prejšnjega poglavja smo videli, da je teorija vzorčenja za velike vzorce razmeroma preprosta in enotna za vse parametre. Problematika vzorcev z malim številom enot pa je veliko bolj zapletena. Čeprav ne moremo napraviti stroge meje, do katere velikosti so vzorci mali in od katere velikosti jih moremo smatrati kot velike, v praksi štejemo vzorce pod ca. 60 enot kot male, vzorce z nad 60 enotami pa kot velike. Vendar ta meja ni stroga in je odvisna predvsem od parametra, ki ga ocenjujemo.

Ocene parametrov se za male vzorce ne distribuirajo več normalno kot za velike vzorce, temveč v različnih distribucijah, odvisno od parametra, ki ga ocenjujemo, in od populacije, iz katere vzorec izhaja. Raziskani so predvsem vzorci, ki izhajajo iz normalno distribuiranih populacij, in še to samo za nekatere parametre. Uporaba malih vzorcev je zaradi tega v večini primerov vezana na predpostavko o normalnosti populacije, iz katere izhaja. Poleg tega pa je veliko bolj komplicirana, kot je bila uporaba velikih vzorcev.

73.1 Stopinje prostosti

Pri malih vzorcih naletimo na pojem *stopinj prostosti*, ki ga pri velikih vzorcih nismo imeli, je pa osnovnega pomena za razumevanje in uporabo malih vzorcev.

Vzemimo, da imamo deset podatkov za deset enot vzorca. Vsak izmed teh desetih podatkov more svobodno variirati, ker niso med seboj odvisni: pravimo, da imamo deset stopinj prostosti. Vzemimo pa, da je teh deset podatkov vezanih na fiksno vrednost aritmetične sredine, ki je dana z enačbo

$$\bar{x} = \frac{1}{10}(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_8 + x_9 + x_{10}) \tag{137}$$

V variaciji teh desetih podatkov je nastala omejitev, ki ima za posledico, da ne more več vseh deset podatkov svobodno variirati. Kajti če imamo danih devet vrednosti, deseta ni več poljubna, temveč vezana z enačbo 137, iz katere jo moremo izračunati po obrazcu

$$x_{10} = 10 \cdot \bar{x} - x_1 - x_2 - x_3 - \dots - x_8 - x_9 \tag{138}$$

V tem sistemu je število podatkov, ki zavzamejo poljubne vrednosti devet in ne deset, kot smo jih imeli v prejšnjem primeru. Število stopinj prostosti je torej 9. Če bi bilo deset podatkov razen aritmetične sredine vezanih še na stalno vrednost ocene variance s^2, bi bilo vseh deset vrednosti določenih že z osmimi vrednostmi, ker bi deveto in deseto mogli izračunati iz $\bar{x}$ in s^2. Število stopinj prostosti bi bilo v tem primeru $m = 10 - 2 = 8$.

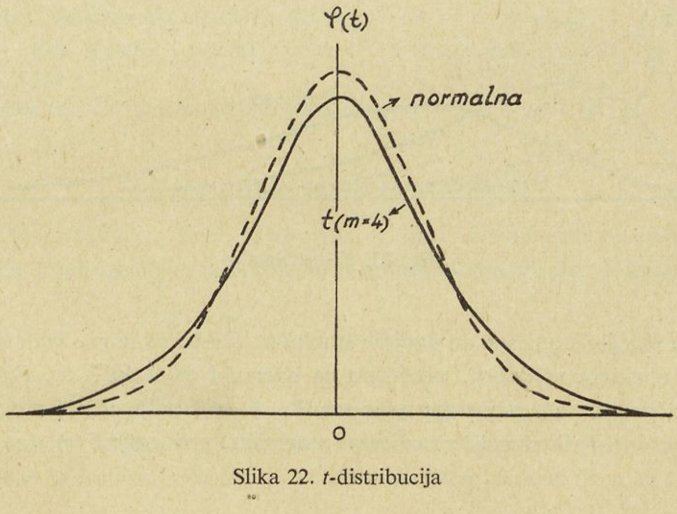
Če imamo pet grup po deset podatkov, podatke vsake grupe pa vezane na grupno aritmetično sredino, je število stopinj prostosti tega sistema $m = 50 - 5 = 45$. Od skupno 50 podatkov je 5 podatkov vezanih z grupnimi aritmetičnimi sredinami, vseh 50 podatkov torej določenih samo s 45 vrednostmi.

Iz zgornjih primerov moremo zaključiti, da je število stopinj prostosti nekega sistema podatkov enako številu podatkov, zmanjšano za število zvez med njimi. Zaradi te definicije moremo število stopinj prostosti seštevati in odštevati; to je njihova važna lastnost. Število stopinj prostosti, ki ga v splošnem zaznamujemo s črko m, je za male vzorce važen pojem, ker so distribucije verjetnosti količin malih vzorcev od njih odvisne. Kot vidimo iz tabel t, x^2 in F v Dodatku, so vse distribucije malih vzorcev odvisne od stopinj prostosti.

73.2 Tri osnovne distribucije malih vzorcev

Razen normalne distribucije so za male vzorce osnovne še naslednje tri distribucije verjetnosti: t-distribucija, χ^2-distribucija in F-distribucija.

t-distribucija je simetrična unimodalna distribucija, ki ima modus pri vrednosti $t = 0$. Njene vrednosti so teoretično v intervalu od $-\infty$ do $+\infty$. t-distribucija je odvisna od stopinj prostosti m. Čim bolj se veča število stopinj prostosti, tem bolj se približuje standardizirani normalni distribuciji $N(M = 0,\ SD = 1)$. Slika 22 kaže t-distribucijo za $m = 4$ in normalno distribucijo $N(M = 0,\ SD = 1)$, ki jo moremo smatrati za t-distribucijo z $m = \infty$. t-distribucije, za katere so stopinje prostosti med $m = 4$ in $m = \infty$, leže med tema dvema krivuljama.

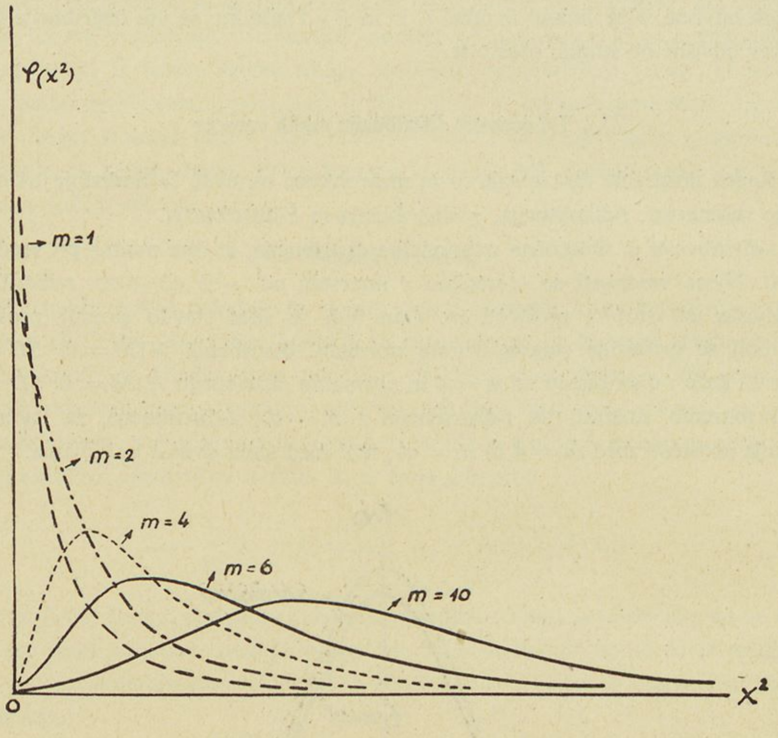


Slika 22. t-distribucija

χ^2-distribucija je tudi odvisna od stopinj prostosti m. Vrednosti χ^2 so na intervalu od 0 do $+\infty$, so torej vedno pozitivne. Za majhno število stopinj prostosti je χ^2-distribucija zelo asimetrična, asimetrija pa se manjša, če se število stopinj prostosti m veča (glej sliko 23 za različne m!). Od $m = 30$ dalje moremo smatrati, da se izraz

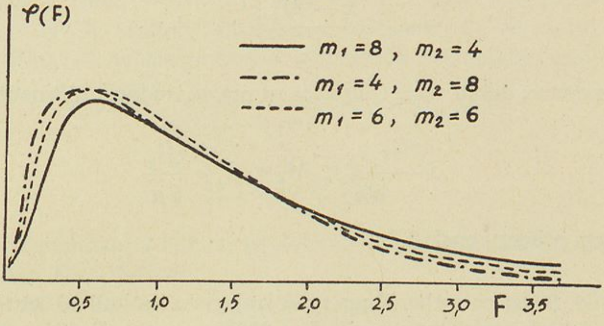
$$z = \sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2m - 1} \tag{139}$$

distribuira v standardizirani normalni distribuciji $N(M = 0, SD = 1)$.



Slika 23. χ^2-distribucija

F-distribucija je odvisna od dvojnih stopinj prostosti: m_1 in m_2. Tudi vrednosti F so vedno pozitivne vrednosti, teoretično na intervalu od 0 do $+\infty$. F-distribucija je asimetrična v desno, asimetrija pa se manjša, če se število stopinj prostosti veča. Slika 24 kaže tri F-distribucije z različnimi stopinjami prostosti: $F(m_1 = 8; m_2 = 4)$, $F(m_1 = 4; m_2 = 8)$ in $F(m_1 = 6; m_2 = 6)$.



Slika 24. F-distribucija

Za normalno distribucijo imamo tabelirane ordinate in verjetnosti za podrobne vrednosti standardiziranega odklona z. Tako podrobne tabele za t-, χ^2- in F-distribucijo niso potrebne. Za praktične potrebe zadostujejo tabele vrednosti izrazov t_P, χ^2_P in F_P za nekatere verjetnosti P, v odvisnosti od stopinj prostosti m. S t_P, χ^2_P in F_P zaznamujemo vrednosti, katere t, χ^2 in F ne prekoračijo z verjetnostjo P. Iz teh tabel moremo določiti intervale, v katerih so z določenim rizikom vrednosti t, χ^2 in F.

Primer 103. Katero vrednost χ^2 z $m = 15$ stopinjami prostosti ne prekorači z rizikom 5 %? V tablicah χ^2 najdemo, da je $\chi^2_{0,05}$ $(m = 15) = 25{,}006$.

Primer 104. Katero vrednost F z $m_1 = 8$; $m_2 = 15$ stopinjami prostosti ne prekorači z 1 % rizikom?

V tablici F-distribucije najdemo, da je $F_{0,01}$ $(m_1 = 8;\ m_2 = 15) = 4{,}00$.

Primer 105. Katero vrednost t z $m = 15$ stopinjami prostosti ne prekorači z rizikom 0,025?

Iz tablice t-distribucije najdemo, da je $t_{0,025}$ $(m = 15) = +2{,}13$.

73.3 **Ocenjevanje mej zaupanja parametrov**

73.31 Ocenjevanje mej zaupanja ocene aritmetične sredine $\bar{x}$. Za male vzorce, ki jih izberemo iz normalno distribuirane populacije, se izraz

$$\frac{\bar{x} - M_x}{s_x} \sqrt{n} = t; \quad m = n - 1 \tag{141}$$

distribuira v t-distribuciji z $m = n - 1$ stopinjami prostosti. Pri tem sta $\bar{x}$ in s^2 nepristrani oceni od M in σ^2, n pa število enot v vzorcu. Meje zaupanja za izraz 141 so dane glede na lastnosti t-distribucije v obrazcu 142

$$-t_p < \frac{\bar{x} - M_x}{s_x} \sqrt{n} < +t_p \tag{142}$$

iz njega pa moremo dobiti meje zaupanja za pravo vrednost aritmetične sredine po obrazcu

$$\bar{x} - \frac{t_p s_x}{\sqrt{n}} < M_x < \bar{x} + \frac{t_p s_x}{\sqrt{n}} \tag{143}$$

Riziko je v tem primeru enak $2P$.

Primer 106. S testom mehanskega presojanja smo testirali 20 četrtošolk postojnske gimnazije in dobili naslednje ocene: $\bar{x} = 22{,}05$; $s = 9{,}1$. Kolike so meje zaupanja prave aritmetične sredine za hipotetično populacijo (z rizikom 5 %)?

Število stopinj prostosti je $m = n - 1 = 20 - 1 = 19$. Ker je riziko $2P = 0{,}05$, moramo poiskati v tabeli t-distribucije $t_{0,025}\,(m = 19) = 2{,}093$. Meje zaupanja so glede na obrazec 143 in zgornje podatke

$$22{,}05 - 2{,}093 \frac{9{,}1}{\sqrt{20}} < M_x < 22{,}05 + 2{,}093 \frac{9{,}1}{\sqrt{20}}$$

$$17{,}79 < M_x < 26{,}31$$

Prava vrednost povprečja M_x leži torej s 5 % rizikom v mejah med 17,79 in 26,31. Kot vidimo, je interval zaupanja precej širok, ker je vzorec zelo majhen.

73.32 Ocenjevanje mej zaupanja variance. Za male vzorce z n enotami, ki jih izberemo iz normalno distribuirane populacije, se izraz

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \chi^2; \quad m = n - 1 \tag{144}$$

distribuira v χ^2-distribuciji z $m = n - 1$ stopinjami prostosti. Meje zaupanja so za ta izraz z rizikom $2P$ dane v obrazcu

$$\chi^2_{1-P} < \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} < \chi^2_P \tag{145}$$

Iz njega pa moremo dobiti meje zaupanja za varianco σ^2 po obrazcu

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_P} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-P}} \tag{146}$$

Primer 107. S testom mehanskega presojanja smo testirali $n = 20$ četrtošolk postojnske gimnazije in dobili oceno variance $s^2 = 82{,}81$. Kolike so meje zaupanja prave vrednosti variance in standardnega odklona? Riziko je 0,10 %.

Za ta primer je torej: $s^2 = 82,81$; $m = n - 1 = 20 - 1 = 19$; $P = 0,05$, ker je riziko $0,10 = 2P$. Iz tabele χ^2 distribucije najdemo $\chi^2_{0,05}$ $(m = 19) = 30,114$ in $\chi^2_{0,95}$ $(m = 19) = 10,117$. Iz teh podatkov in obrazca 146 dobimo meje zaupanja za varianco:

$$\frac{(20 - 1) \cdot 82,81}{30,114} < \sigma^2 < \frac{(20 - 1) \cdot 82,81}{10,117}$$

$$52,3 < \sigma^2 < 155,5$$

Meje zaupanja za standardni odklon pa dobimo, če poiščemo kvadratni koren iz mej zaupanja variance. Tako dobimo:

$$7,2 < \sigma < 12,5$$

73.33 Ocenjevanje mej zaupanja strukturnega odstotka. Če smo iz dane populacije izbrali n enot in ugotovili, da ima od teh x enot karakteristiko, ki jo proučujemo, moremo z rizikom $2P$ oceniti meje zaupanja strukturnega procenta te karakteristike v populaciji po naslednjem postopku:

a) Iz tablic F-distribucije poiščemo k $m_1 = 2(n - x + 1)$ in $m_2 = 2x$ in P ustrezajočo vrednost F_s.

b) Spodnjo mejo zaupanja strukturnega procenta p_s dobimo po obrazcu

$$p_s = \frac{100 \cdot x}{x + (n - x + 1) F_s} \tag{147}$$

c) Iz tablic F-distribucije poiščemo k $m_1 = 2(x + 1)$ in $m_2 = 2(n - x)$ stopinjam prostosti in P ustrezajočo vrednost F_z.

d) Zgornjo mejo zaupanja prave vrednosti strukturnega odstotka dobimo po obrazcu

$$p_z = \frac{100(x + 1) F_z}{n - x + (x + 1) F_z} \tag{148}$$

Primer 108. V razredu z $n = 35$ učenci smo ugotovili, da jih $x = 12$ laže. Kolike so meje zaupanja odstotka lažnivih otrok populacije otrok pod enakimi pogoji. Meje zaupanja naj bodo take, da moremo računati z 10 % rizika, da prava vrednost pade v interval zaupanja.

Iz problema dobimo, da je: $n = 35$; $x = 12$.

Da dobimo spodnjo mejo zaupanja, moramo najprej poiskati F_s.

Ta je enak: Ker je $P = 0,05$; $m_1 = 2(n - x + 1) = 2(35 - 12 + 1) = 48$ in $m_2 = 2x = 2 \cdot 12 = 24$, dobimo iz tablice F-distribucije $F_s = 1,74$.

S temi podatki dobimo po obrazcu 147 p_s

$$p_s = \frac{100 \cdot 12}{12 + (35 - 12 + 1) \cdot 1,74} = 22,3\ \%$$

Zgornjo mejo pa dobimo, da najprej poiščemo F_z. Ker je $P = 0{,}05$; $m_1 = 2(x + 1) = 2(12 + 1) = 26$; $m_2 = 2(n - x) = 2(35 - 12) = 46$, dobimo iz tablic F-distribucije $F_z = 1{,}83$, iz tega pa p_z po obrazcu 148

$$p_z = \frac{100\,(12 + 1) \cdot 1{,}83}{35 - 12 + (12 + 1) \cdot 1{,}83} = 50{,}8\ \%$$

Pravi odstotek lažnivih otrok leži z verjetnostjo 0,90 med 22,3 % in 50,8 %.

73.34 Ocenjevanje mej zaupanja korelacijskega koeficienta. Ocene korelacijskih koeficientov se ne distribuirajo v nobeni izmed navedenih distribucij. Šele za zelo velike vzorce iz populacij, ki imajo majhno korelacijo, se distribuirajo normalno. Vendar moremo z razmeroma preprosto transformacijo korelacijskega koeficienta dobiti količino, ki se distribuira približno normalno tudi za majhne vzorce. To količino, ki jo zaznamujemo z Z, dobimo iz korelacijskega koeficienta r s pomočjo obrazca

$$Z = 1{,}1513 \log \frac{1 + r}{1 - r} \tag{149}$$

Zdi se, da je ta Fisherjeva transformacija računsko težko izvedljiva, vendar imamo za praktične potrebe transformiranja izdelano tabelo zveze Z z r in obratno. (Glej tabelo F!) Z se distribuira normalno z $M_Z = 0$, in $SD_Z = 1/\sqrt{n - 3}$.

Glede na te lastnosti izračunamo meje zaupanja korelacijskega koeficienta po naslednjem postopku:

a) Izračunamo oceno korelacijskega koeficienta r. Oceno korelacijskega koeficienta dobimo po obrazcih za izračunavanje korelacijskega koeficienta v odstavku 61.2.

b) Dobljeni vrednosti r poiščemo v tabeli F ustrezajočo vrednost Z.

c) Poiščemo riziku $2P$ ustrezajočo vrednost standardiziranega odklona z_P.

d) Izračunamo meje zaupanja vrednosti Z po obrazcih

$$Z_s = Z - z_p/\sqrt{n - 3}\,; \quad Z_z = Z + z_P/\sqrt{n - 3} \tag{150}$$

e) Meje zaupanja korelacijskega koeficienta dobimo tako, da iz tabele F poiščemo Z_s in Z_z ustrezajoče vrednosti r_s in r_z.

Primer 109. Med rezultati mehanskega in spacialnega testa tretješolcev mariborske klasične gimnazije smo našli $r = 0{,}76$. Kolike so meje zaupanja za oceno tega korelacijskega koeficienta z rizikom $2P = 0{,}05$, če računamo teh 20 dijakov kot vzorec iz hipotetične populacije. $r = 0{,}76$ ustreza v tabeli F $Z = 1{,}00$. $z_{0,025} = 1{,}96$. Po obrazcu 150 moremo dobiti meje zaupanja za vrednosti Z

$$Z_s = 1{,}00 - 1{,}96/\sqrt{20 - 3} = 0{,}524; \quad Z_z = 1{,}00 + 1{,}96/\sqrt{20 - 3} = 1{,}476$$

Vrednosti $Z_s = 0{,}524$ ustreza v tabeli F $r_s = 0{,}49$, vrednosti $Z_z = 1{,}476$ pa $r_z = 0{,}90$. Prava vrednost korelacijskega koeficienta torej leži s 5 % rizikom v mejah med 0,49 in 0,90.

Kot je razvidno iz dobljenih podatkov, interval zaupanja ni simetričen glede na vrednost ocene 0,76. V levo se odklanja za 0,27, v desno pa samo za 0,14, ker distribucija ocen korelacijskega koeficienta ni simetrična distribucija, razen če je korelacija nič.

73.4 Ocenjevanje mej zaupanja za primerjavo parametrov

73.41 Meje zaupanja diference sredin dveh vzorcev. Že pri velikih vzorcih smo poudarili važnost primerjave statističnih parametrov, ki pokaže učinek spremembe faktorjev. Enako kot za velike vzorce bomo tudi za male vzorce ocenili razliko aritmetičnih sredin dveh populacij z diferenco aritmetičnih sredin vzorcev iz obeh populacij

$$d_{\bar{x}} = \bar{x}_2 - \bar{x}_1 \tag{151}$$

Če sta varianci obeh populacij enaki, populaciji pa normalno distribuirani, se izraz

$$\frac{d_{\bar{x}} - \delta_M}{s_d}\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} = t\,(m = n_1 + n_2 - 2) \tag{152}$$

distribuira v t-distribuciji z $m = n_1 + n_2 - 2$ stopinjami prostosti.

$$d_{\bar{x}} = \bar{x}_2 - \bar{x}_1;\quad \delta_M = M_2 - M_1 \tag{153}$$

$$s_d^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{K_1 + K_2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{\underset{1}{S}x^2 + \underset{2}{S}x^2 - \frac{X_1^2}{n_1} - \frac{X_2^2}{n_2}}{n_1 + n_2 - 2} \tag{154}$$

Interval zaupanja pa dobimo z obrazcem

$$d_{\bar{x}} - t_P s_d \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}} < \delta_M < d_x + t_P s_d \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}} \tag{155}$$

Pri tem je: n_1 = število enot v prvem; n_2 = število enot v drugem vzorcu; $d_{\bar{x}}$ = razlika sredin vzorcev; δ_M = razlika sredin populacij, s_d pa izračunamo po obrazcih 154. V obrazcu so alternativne oblike izračunavanja s_d^2, ki jih moremo uporabljati glede na razpoložljive podatke. Indeksi 1 in 2 se nanašajo na prvi in drugi vzorec: $X_1 = \underset{1}{S}x$; $X_2 = \underset{2}{S}x$ itd. Meje zaupanja pa moremo izračunati s temi izrazi po obrazcu 155.

Primer 110. Vzemimo podatke iz primera 60. V vzorcu imamo 12 četrtošolcev in 16 četrtošolk VIII. gimnazije v Ljubljani, ki smo jih testirali s testom zmožnosti mehanskega presojanja. Oceniti je treba razliko v povprečnih dosežkih in izračunati meje zaupanja diference s 5 % rizikom.

Iz primera 60 moremo dobiti že izračunane vse potrebne osnovne količine:

Dečki .... $n_1 = 12$; $X_1 = 544$; $\underset{1}{Sx^2} + \underset{2}{Sx^2} = Q_{ki} = 34264$;

Deklice .... $n_2 = 16$; $X_2 = 350$; $\dfrac{X_1^2}{n_1} + \dfrac{X_2^2}{n_2} = Q_k = 32317{,}69$

V zgornjih izrazih je samo y zamenjan z x, druge količine pa s simboli za vzorec, ker smo v primeru 60 smatrali podatke kot podatke populacije.

Iz zgornjih podatkov dobimo dalje:

$\bar{x}_1 = 544/12 = 45{,}33$ $\quad s_d^2$ dobimo po obrazcu 154

$\bar{x}_2 = 350/16 = 21{,}88$

$d_{\bar{x}} = 23{,}45$

$$s_d^2 = \frac{34264 - 32317{,}69}{12 + 16 - 2} = 7{,}49; \quad s_d = 2{,}74$$

Število stopinj prostosti je $m = n_1 + n_2 - 2 = 12 + 16 - 2 = 26$

$$t_{0,025}(m = 26) = 2{,}06 \quad t_P s_d \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}} = 2{,}06 \cdot 2{,}74 \sqrt{\frac{12 + 16}{12 \cdot 16}} = 2{,}15$$

$$23{,}45 - 2{,}15 < \delta_M < 23{,}45 + 2{,}15$$

$$21{,}30 < \delta_M < 25{,}60$$

Ocena razlik med dečki in deklicami je $d_{\bar{x}} = 23{,}45$, prava vrednost razlik pa leži s 5 % rizikom med 21,30 in 25,60.

73.42 Meje zaupanja razmerja varianc dveh vzorcev. Razmerje varianc moremo oceniti s kvocientom ocen varianc s_1^2/s_2^2, ki smo jih dobili z vzorcem iz prve, oziroma druge populacije. Če sta populaciji normalno distribuirani, moremo izračunati meje zaupanja razmerja z rizikom $2P$ po obrazcu

$$\frac{1}{F_s} \cdot \frac{s_1^2}{s_2^2} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < F_z \frac{s_1^2}{s_2^2} \tag{156}$$

Pri tem sta: s_1^2 in s_2^2 nepristrani oceni variance prve in druge populacije, σ_1^2 in σ_2^2 pravi vrednosti variance obeh populacij, $F_s = F_p\,(m_1 = n_1 - 1;\ m_2 = n_2 - 1)$; $F_z = F_P\,(m_1 = n_2 - 1;\ m_2 = n_1 - 1)$.

Primer 111. Iz vzorcev $n_1 = 12$ četrtošolcev in $n_2 = 16$ četrtošolk VIII. gimnazije v Ljubljani smo ocenili varianci dosežkov pri mehanskem testu za dečke $s_1^2 = 71{,}5$

in za deklice $s_2^2 = 68{,}0$. Določiti je treba oceno razmerja varianc in meje zaupanja kvocienta varianc z 10 % rizikom.

Podatki o vzorcih so:

$$n_1 = 12;\ s_1^2 = 71{,}5; \qquad \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{71{,}5}{68{,}0} = 1{,}05$$
$$n_2 = 16;\ s_2^2 = 68{,}0;$$

Iz tablic F-distribucije dobimo:

$$F_s = F_{0,05}\,(m_1 = 12 - 1 = 11;\ m_2 = 16 - 1 = 15) = 2{,}51$$
$$F_z = F_{0,05}\,(m_1 = 16 - 1 = 15;\ m_2 = 12 - 1 - 11) = 2{,}72$$

Če te podatke vstavimo v obrazec 156, dobimo meje zaupanja za varianco

$$\frac{1}{2{,}51}\,1{,}05 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 2{,}72 \cdot 1{,}05$$

$$0{,}42 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 2{,}86$$

Meje zaupanja standardnih odklonov dobimo s kvadratnim korenom rezultatov za varianco.

$$0{,}65 < \frac{\sigma_1}{\sigma_2} < 1{,}69$$

Iz dobljenih rezultatov vidimo, da je ocena razmerja varianc zelo slaba, ker je interval zaupanja zelo širok. Po tem rezultatu je možno, da je $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$.

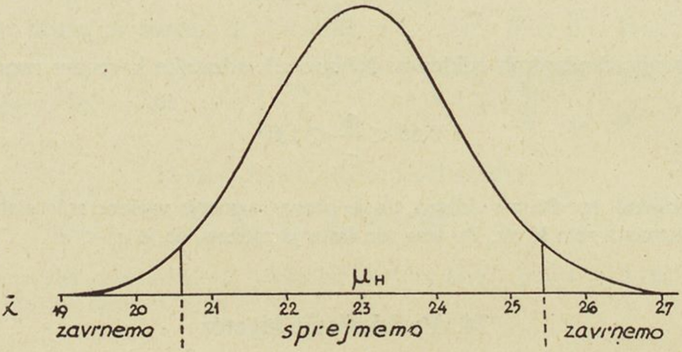
74. **Preizkušanje hipotez**

74.1 **Osnova**

74.10 Problem. Dobršen del statistične analize, posebno z malimi vzorci, s katerimi je ocenjevanje parametrov problematično, sestoji iz preizkušanja hipotez. Problem preizkušanja hipotez je v elementarni obliki znan iz vsakdanjega življenja. Dostikrat si o določenem problemu ustvarimo vnaprej sodbo in na osnovi nje ukrepamo. Življenje oziroma preizkušnja našo hipotezo potrdi ali ovrže. Vse take sodbe delamo z zavestjo, da se bodo ali potrdile ali ne. Preizkušanje hipotez v statističnem smislu ima elemente zgornjega načina sklepanja, vendar po metodah, ki so objektivne.

Problematiko preizkušanja statističnih hipotez bomo najlaže obravnavali s praktičnim primerom. Vzemimo, da se število doseženih točk testa o presojanju abstraktnih odnosov distribuira normalno z znanim standardnim odklonom $\sigma = 12{,}2$. Aritmetične sredine populacije M ne poznamo, pač pa postavljamo hipotezo, da je prava vrednost aritmetične sredine M enaka hipotetični vrednosti $M_H = 23$. Naša hipoteza je torej: $M = M_H = 23$ točk. Vprašanje, ki ga je treba rešiti, je: ali je stvarna vrednost aritmetične sredine M resnično enaka hipotetični vrednosti $M_H = 23$ ali je od nje različna. To vprašanje moremo rešiti s popolnim pregledom vseh enot populacije. Primerjava izračunane prave aritmetične sredine M s hipotetično M_H bi našo hipotezo potrdila ali ovrgla. Ta način, čeprav je preprost, v splošnem ne pride v poštev, ker je prezamuden, pri hipotetičnih populacijah pa sploh neizvedljiv. Zato skušajmo rešiti vprašanje z vzorcem.

Vzemimo v vzorec $n = 100$ enot-testirancev in poglejmo, kaj moremo sklepati iz njega. Ker poznamo $\sigma = 12{,}2$ in hipotetično vrednost aritmetične sredine $M_H = 23$, moremo iz lastnosti aritmetičnih sredin vzorcev sklepati, kako se distribuirajo aritmetične sredine vseh možnih vzorcev po 100 enot, če je naša hipoteza $M_H = 23$ resnična. Aritmetične sredine vseh vzorcev bi se v tem primeru distribuirale normalno z $M_{\bar{x}} = M_H = 23$ in standardno pogreško $SE_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n} = 12{,}2/\sqrt{100} = 1{,}22$.



Slika 25. Preizkušanje hipoteze $M = M_H = 23$. Pravilo A

Ta distribucija sredin $\bar{x}$ je narisana v sliki 25. Teoretično more $\bar{x}$ zavzeti vse vrednosti na intervalu od $-\infty$ do $+\infty$. Vendar vemo, da moremo z veliko verjetnostjo ($G = 0{,}95$) pričakovati, da je aritmetična sredina vzorca s sto enotami x v intervalu $M_H - 1{,}96\sigma/\sqrt{n}$ do $M_H + 1{,}96\sigma/\sqrt{n}$, v našem primeru med 20,6 in 25,4. Aritmetična sredina vzorca bo z verjetnostjo 0,95 v intervalu od 20,6 do 25,4 točke, če naša hipoteza $M = M_H = 23$ drži. Iz tega moremo napraviti preprosto pravilo preizkušanja hipoteze o aritmetični sredini:

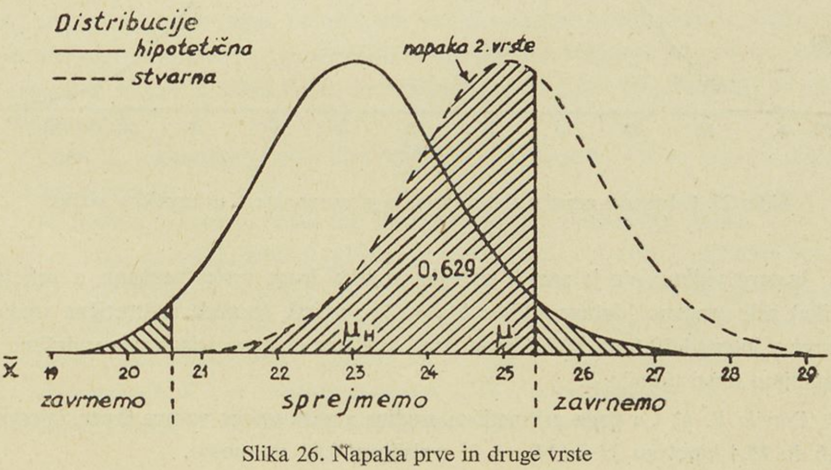
Pravilo A: Hipotezo, da je $M = M_H = 23$, sprejmemo, če aritmetična sredina preizkusnega vzorca pade v interval od 20,6 do 25,4, zavrnemo pa jo, če pade izven teh mej.

To pravilo je nazorno vidno iz slike 25. Na prvi pogled je situacija čista. Če je prava vrednost aritmetične sredine večja od hipotetične, bo aritmetična sredina preizkusnega vzorca tudi verjetno velika in bo padla nad mejo 25,4 in hipotezo $M_H = 23$ bomo tako praviloma zavrnili. Enako bi sklepali tudi, če bi bila prava aritmetična sredina manjša od hipotetične.

74.11 Napaka prve in druge vrste. Čeprav je pravilo *A* enostavno, je z njim možno sklepati tudi napačno. Iz slike 25 vidimo, da obstoji verjetnost, da aritmetična sredina pade izven intervala 20,6 do 25,4, kljub temu da je prava vrednost M enaka hipotetični $M_H = 23$. Če slučajno naletimo na tak vzorec, smo napravili *napako prve vrste*: hipotezo smo zavrnili, kljub temu da je pravilna. Verjetnost napake prve vrste je v našem primeru 0,05. Pri zavračanju hipoteze je 5 % riziko, da je naš sklep o zavrnitvi hipoteze napačen. Jasno je, da moremo napako prve vrste poljubno spreminjati s tem, da v pravilu *A* spreminjamo interval. Vendar je preciznost naše sodbe manjša, če riziko prve vrste zmanjšujemo. Običajno preizkušamo hipoteze na enem od treh stopenj napake, oziroma rizika prve vrste: 0,05, 0,01 ali 0,001.

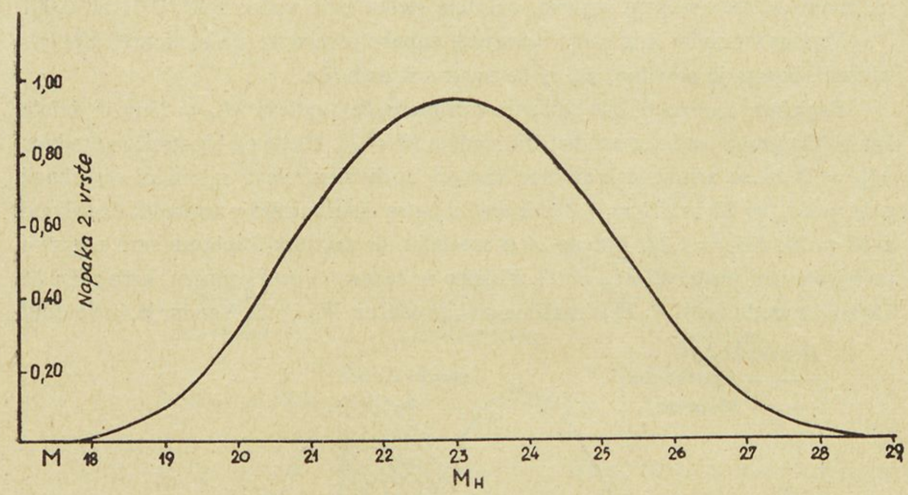
Vendar v pravilu *A* ni samo nevarnost napake prve vrste, da bi namreč hipotezo zavrnili, čeprav je pravilna, niti ni ta nevarnost najhujša.

Poglejmo, kakšna bi bila situacija v primeru, če hipoteza $M_H = 23$ ne bi držala, ker bi bila prava vrednost aritmetične sredine $M = 25$. Glede na hipotetično vrednost $M_H = 23$ bi se aritmetične sredine vzorcev $\bar{x}$ distribuirale v normalni distribuciji z $M = M_H = 23$ in $SE_{\bar{x}} = 1{,}22$, dejansko pa se distribuirajo v normalni distribuciji z $M = 25$, $SE_{\bar{x}} = 1{,}22$. Pravilo *A* o sprejetju ali zavrnitvi hipoteze smo napravili po hipotetični vrednosti $M_H = 23$. Kakšne so razmere v tem primeru, kaže slika 26. Dejanska vrednost $M = 25$ je različna od hipotetične $M_H = 23$. Vendar je, kot vidimo



Slika 26. Napaka prve in druge vrste

iz slike 26, velika verjetnost (0,629), da bomo kljub temu, da je $M = 25$ in ne $M_H = 23$, iz populacije izvlekli vzorec, za katerega bo aritmetična sredina $\bar{x}$ ležala v intervalu sprejetja hipoteze 20,6 do 25,4. Po pravilu A smo hipotezo $M_H = 23$ sprejeli, kljub temu da ni pravilna. Napravili smo *napako druge vrste*: sprejeli hipotezo, čeprav je napačna. Napaka druge vrste je veliko bolj pogosta in nevarna kot napaka prve vrste. Napako prve vrste moremo poljubno regulirati in jo držati v dopustnih mejah. Napaka druge vrste pa more biti zelo velika (v našem primeru 0,629) in kar je najhuje, odvisna je od prave vrednosti sredine M, ki je pa ne poznamo, in je tem večja, čim manj se hipotetična vrednost razlikuje od dejanske. Ker je napaka druge vrste odvisna od prave vrednosti, je v konkretnem primeru ne moremo določiti. O njej vemo samo to, da more biti zelo velika. Za naš primer je v sliki 27 narisan grafikon, ki kaže odvisnost napake druge vrste od prave vrednosti aritmetične sredine. Iz grafikona vidimo, da je napaka druge vrste, če je prava vrednost malo različna od hipotetične, malo manj kot 0,95, in tem manjša, čim bolj je M različen od M_H.



Slika 27. Odvisnost napake druge vrste od prave vrednosti aritmetične sredine

Iz tega vidimo, da je zaradi značaja napake druge vrste (neznana, a verjetno velika) zelo tvegano hipotezo $M = M_H = 23$ sprejeti, če pade aritmetična sredina vzorca v interval 20,6 do 25,4. Zaradi tega se v tem primeru izjave raje vzdržimo in postavimo novo pravilo B.

Pravilo B: a) Če pade aritmetična sredina preizkusnega vzorca izven intervala 20,6 do 25,4 hipotezo $M = M_H = 23$ z rizikom 0,05 zavrnemo.

b) Če pade aritmetična sredina preizkusnega vzorca v interval 20,6 do 25,4, pa se izjave o pravilnosti ali nepravilnosti hipoteze vzdržimo.

Pravilo *B* je pravilnejše od pravila *A*, ima pa dve slabi strani. Prvič moremo z njim hipoteze samo zavračati, če niso pravilne, ne moremo jih pa sprejemati, če so pravilne. Druga slaba stran pa je, da nastopa v našem načinu sklepanja interval, za katerega ne moremo dati nobene izjave. Vzorec v tem primeru ne da odgovora na osnovno vprašanje, ali hipoteza drži ali ne.

74.12 Ničelna hipoteza. Prvo hibo odstranimo tako, da namesto osnovne hipoteze postavimo osnovni hipotezi negativno hipotezo, katero imenujemo *ničelna hipoteza.* Zavrnitev ničelne hipoteze pomeni sprejem osnovne. S tem dosežemo, da moremo osnovne hipoteze s pomočjo ničelnih hipotez sprejemati. Ničelne hipoteze po pravilu vedno postavljamo z namenom, da jih zavrnemo. Če hočemo na primer preizkusiti hipotezo, da je prava aritmetična sredina populacije različna od $M_H = 23$ (hipoteza $M \neq M_H = 23$), napravimo ničelno hipotezo, da prava aritmetična sredina ni različna od $M_H = 23$ (ničelna hipoteza: $M = M_H = 23$). Zavrnitev ničelne hipoteze pomeni potrditev osnovne hipoteze, da razlike eksistirajo. Namesto pravila *B*, bomo zaradi tega postavili končno pravilo *C* o preizkušanju hipotez z ničelnimi hipotezami.

Pravilo C: Če pade aritmetična sredina vzorca $\bar{x}$ *izven* kritičnega intervala 20,6 do 25,4, pravimo, da je aritmetična sredina populacije *M* na nivoju 0,05 *značilno različna* od hipotetične sredine $M_H = 23$.

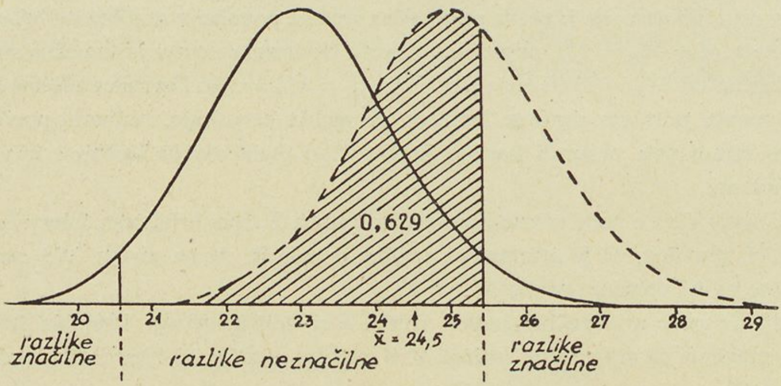
b) Če pade aritmetična sredina vzorca $\bar{x}$ *znotraj* kritičnega intervala 20,6 do 25,4, pravimo, da aritmetična sredina *M ni značilno različna* od hipotetične vrednosti $M_H = 23$.

Značilnost razlik na nivoju 0,05 pomeni, da je napaka prve vrste 0,05. Značilnost oziroma neznačilnost razlik pomeni, da smo z vzorcem razlike odkrili (značilnost), oziroma jih nismo odkrili (neznačilnost). Neznačilnost razlik pa nikakor ne pomeni, da razlik ni, temveč pomeni samo, da z našimi sredstvi nismo mogli odkriti, ali razlike obstajajo ali ne.

Interval, v katerem razlike niso značilne, imenujemo *kritični interval,* meje pa *kritične vrednosti.*

Na velikost kritičnega intervala moremo vplivati z velikostjo vzorca. Čim večji je vzorec, tem manjši je kritični interval in tem večja je verjetnost, da bomo z našim preizkusom odkrili značilnost razlik, če razlike med stvarno in hipotetično vrednostjo resnično obstajajo. Značilnost velikih razlik med hipotetičnimi in stvarnimi vrednostmi odkrijemo z majhnimi vzorci, medtem ko se značilnost majhnih razlik pokaže šele pri večjih vzorcih. Ker se z večanjem vzorca kritični interval manjša, se z njim manjša tudi napaka druge vrste in s tem veča možnost zaključevanja.

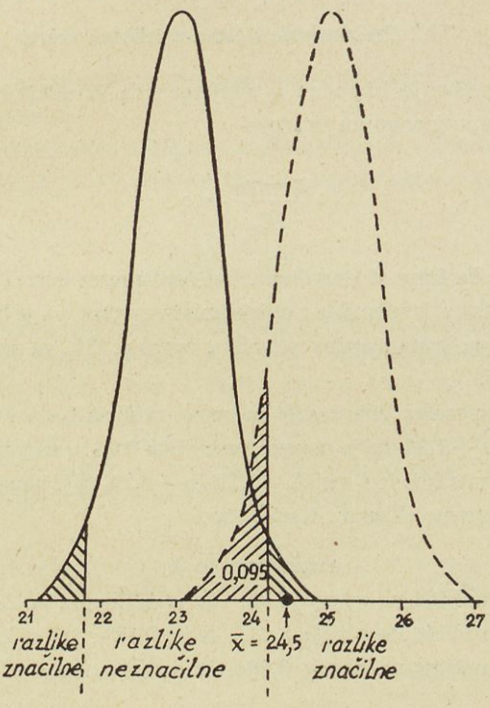
Da osvetlimo zgornji problem, vzemimo, da smo z vzorcem 100 enot, s katerim preizkušamo hipotezo $M = M_H = 23$, dobili $\bar{x} = 24{,}5$. Aritmetična sredina vzorca je torej padla v kritični interval 20,6 do 25,4. Razlika prave vrednosti se ni pokazala kot značilna. Povečajmo vzorec na $n = 400$ enot. Nov kritični interval, izračunan po istem principu kot prvotni, je 21,8 do 24,2. Vzemimo, da smo z vzorcem 400 enot dobili slučajno enako aritmetično sredino $\bar{x} = 24{,}5$ kot z vzorcem 100 enot. Ker pade 24,5 izven novega kritičnega intervala 21,8 do 24,2, smo z novim vzorcem ugotovili, da so razlike med M in M_H značilne. Kakšna je situacija pri manjšem, kakšna pa pri večjem vzorcu, je razvidno iz slik 28 in 29. Iz slike 29 vidimo tudi, da se je napaka druge vrste pri novem vzorcu zmanjšala na 0,095. V primerjavi s prejšnjo (0,629) je skrčenje zelo veliko.



Slika 28. Preizkušanje hipoteze $M = M_H = 23$ z vzorcem $n = 100$ enot

Zaradi tega dostikrat pri preizkušanju hipotez uporabljamo dvojne ali trojne vzorce. Po tem principu najprej preizkušamo hipotezo z vzorcem z majhnim številom enot n. Če se razlike pokažejo značilne, postopek prekinemo, ker smo cilj dosegli. V nasprotnem primeru pa vzorec podvojimo in ponovno preizkušamo hipotezo z vzorcem z $2n$ enotami. Če so se pokazale razlike značilne, postopek ustavimo, v nasprotnem primeru pa dodamo vzorcu še n enot, da imamo vzorec s $3n$ enotami. Preizkus ponovimo na novem vzorcu. Ta postopek se v dosti primerih pokaže kot zelo rentabilen, posebno kadar je izbor in preizkušanje posameznih enot drago.

Razlike morejo biti značilne na enem in neznačilne na drugem nivoju. Tako na primer vzorec 100 enot, pri katerem bi dobili $\bar{x} = 25{,}1$, ne bi pokazal značilnosti razlik na nivoju 0,05, ker v tem primeru $\bar{x} = 25{,}1$ pade v kritični interval 20,6 do 25,4, pač pa se razlike pokažejo kot značilne na nivoju 0,10, pri katerem je kritični interval 21,0 do 25,0 in vrednost $\bar{x} = 25,1$ pade izven kritičnega intervala. Vendar moramo biti pri tem sklepu oprezni, ker smo napako prve vrste povečali na 0,10. Verjetnost, da smo sklepali napačno in da razlike vseeno ne obstoje, se je povečala na 0,10.



Slika 29. Preizkušanje hipoteze $M = M_H = 23$ z vzorcem $n = 400$ enot

74.13 Postopek preizkušanja hipotez. Princip preizkušanja hipoteze, kot smo ga izvedli za aritmetično sredino, velja za preizkušanje vseh statističnih hipotez z velikimi in malimi vzorci.

Na splošno preizkušamo ničelne hipoteze po naslednjem postopku:

a) Poiščemo preizkušanemu parametru ustrezajoči izraz E. E je odvisen od hipotetične vrednosti parametra γ_H in preizkusnega vzorca in se v primeru, da ničelna hipoteza drži, distribuira v eni izmed distribucij: z, t, χ^2 ali F.

b) Določimo kritični interval izraza E z dano napako prve vrste.

c) Iz podatkov preizkusnega vzorca izračunamo vrednost izraza E_1.

d) Po pravilu *C* za preizkušanje ničelnih hipotez sklepamo: Če pade vrednost E_1, izračunana iz poizkusnega vzorca, izven kritičnega intervala, je dejansko stanje na določenem nivoju rizika značilno različno od hipotetičnega. Če pa pade E_1 v kritični interval, razlike med dejanskim in hipotetičnim stanjem niso značilne.

74.2 **Preizkušanje hipotez z velikimi vzorci**

74.21 Preizkušanje hipotez o parametrih. Z velikimi vzorci preizkušamo vrednosti parametrov z enotnim izrazom

$$\frac{g - \gamma_H}{SE_g} = z \tag{157}$$

za vse parametre. Ta izraz se distribuira standardizirano normalno. V obrazcu 157 je g ocena parametra γ, izračunana s poizkusnim vzorcem, γ_H je hipotetična vrednost parametra γ, SE_g pa je standardna pogreška ocene g. SE_g za ustrezajoči parameter dobimo v tabeli 47.

Iz lastnosti normalne distribucije moremo zaključiti, da je kritični interval z v mejah $-1{,}96$ do $+1{,}96$, če je napaka prve vrste 0,05, v mejah $-2{,}58$ do $+2{,}58$, če je napaka prve vrste 0,01 in v mejah $-3{,}29$ do $+3{,}29$, če je napaka prve vrste 0,001.

Preprosteje moremo sklepati. Razlike so:

neznačilne,	če je	$\lvert z\rvert < 1{,}96$
značilne na nivoju 0,05,	če je	$1{,}96 < \lvert z\rvert < 2{,}58$
značilne na nivoju 0,01,	če je	$2{,}58 < \lvert z\rvert < 3{,}29$
značilne na nivoju 0,001,	če je	$3{,}29 < \lvert z\rvert$

Primer 112. Z vzorčnim testiranjem 200 četrtošolcev skušamo preizkusiti hipotezo, da je za test presojanja mehanskih odnosov četrtošolcev v Sloveniji standardni odklon SD značilno različen od $SD_H = 11{,}0$.

Ničelna hipoteza: $SD_H = 11{,}0$

Preizkusni vzorec: $n = 200$; $s = 13{,}0$

Iz obrazca 157 in tabele 47/8 dobimo:

$$\frac{s - SD_H}{SD_H/\sqrt{2n}} = z; \quad \text{za preizkusni vzorec: } z = \frac{13 - 11}{11/\sqrt{2 \cdot 200}} = +3{,}64$$

$$\lvert z\rvert = 3{,}64 > 3{,}29. \text{ Razlike so značilne na nivoju 0,001.}$$

Z rizikom 0,001 moremo torej trditi, da je dejanski standardni odklon različen od hipotetične vrednosti $SD_H = 11{,}0$.

74.22 Preizkušanje hipotez razlik med parametri. Preizkušanje hipotez razlik med vrednostmi parametra za dve populaciji je samo poseben primer preizkušanja hipotez za velike vzorce. Ker poznamo splošen obrazec za izračunavanje standardne pogreške razlik dveh neodvisnih ocen, moremo postaviti izraz E v obliki obrazca

$$\frac{g_2 - g_1 - \delta_{\gamma H}}{\sqrt{SE_{g_1}^2 + SE_{g_2}^2}} = z \tag{158}$$

Ničelno hipotezo, da je razlika med parametroma enaka $\delta_{\gamma H}$ preizkusimo enako kot v prejšnjem primeru.

Največkrat preizkušamo, ali razlike sploh obstajajo. V tem primeru kot ničelno hipotezo postavimo: $\delta_{\gamma H} = 0$, obrazec 158 pa se spremeni v obrazec

$$\frac{g_2 - g_1}{\sqrt{SE_{g_1}^2 + SE_{g_2}^2}} = z \tag{159}$$

Primer 113. Preizkusiti je treba, ali obstajajo razlike v določeni zmožnosti med dečki in deklicami. Kot parameter, s katerim bomo razlike proučevali, vzemimo odstotek dečkov ali deklic, ki so določeno nalogo, ki to zmožnost zahteva, rešili. Ničelna hipoteza je: razlik po spolu ni; $P_{H_1} = P_{H_2}$. Za ta namen smo izbrali slučajno $n_1 = 300$ dečkov, od katerih je $P_1 = 78\,\%$ postavljeno nalogo rešilo pravilno, in $n_2 = 200$ deklic, od katerih je isto nalogo rešilo $P_2 = 68\,\%$.

S pomočjo obrazca 159 in tabele 47/3 izračunamo z

$$\frac{P_1 - P_2}{\sqrt{\dfrac{P_1(100 - P_1)}{n_1} + \dfrac{P_1(100 - P_2)}{n_2}}} = \frac{75 - 68}{\sqrt{\dfrac{75(100 - 75)}{300} + \dfrac{68(100 - 68)}{200}}} = +1{,}68 = z$$

Ker je $|z| = 1{,}68 < 1{,}96$, se razlike niso pokazale kot značilne.

74.3 Preizkušanje hipotez z malimi vzorci

Preizkušanje hipotez z malimi vzorci pride praktično večkrat v poštev kakor preizkušanje hipotez z velikimi vzorci. Za velike vzorce so ocene parametrov običajno toliko zanesljive, da jih moremo dati numerično, ne pa o njih samo sklepati, ali so ali niso različne od dane količine. Za male vzorce pa so ocene dostikrat zelo nezanesljive, kar moremo videti iz primerov 105 do 110, in je včasih nujno, da ugotavljamo samo obstoj razlik.

Za male vzorce je sicer princip preizkušanja hipotez podoben postopku za velike vzorce, vendar količine, s katerimi hipoteze preizkušamo, in distribucije, v katerih se te količine distribuirajo, niso enotne. Zaradi tega bomo po vrsti navedli postopek preizkušanja hipotez z majhnimi vzorci za nekaj najvažnejših problemov.

74.31 Preizkušanje hipoteze o aritmetični sredini.

74.311 Če izhaja vzorčna aritmetična sredina iz normalne populacije z aritmetično sredino M_H, se izraz

$$\frac{\bar{x} - M_H}{s_x} \sqrt{n} = t\,(m = n - 1) \tag{160}$$

distribuira v t-distribuciji z $m = n - 1$ stopinjami prostosti. Podobno kot za normalno distribucijo je kritični interval v mejah $-t_P$ do $+t_P$ (riziko $2P$). Pravilo preizkušanja hipoteze o aritmetični sredini moremo postaviti enostavneje, da rečemo, da so razlike med pravo aritmetično sredino M in hipotetično M_H značilne na nivoju $2P$, če je $|t| > t_P$.

Primer 114. Preizkusiti je treba, ali so zmožnosti mehanskega presojanja tretješolcev mariborske klasične gimnazije značilno različne od splošnega nivoja zmožnosti presojanja mehanskih odnosov tretješolcev v LRS.

Ničelna hipoteza: $M_H = 33{,}1$.

Preizkusni vzorec 20 tretješolcev mariborske klasične gimnazije je dal naslednje rezultate: $n = 20$; $\bar{x} = 41$; $s = 7{,}1$. Če poiščemo vrednost t iz obrazca 160, dobimo:

$$\frac{41 - 33{,}1}{7{,}1} \sqrt{20} = 4{,}97 = t; \quad \text{kritična vrednost } t_{0{,}001}\,(m = 20 - 1 = 19) = 3{,}883$$

Ker je dobljena vrednost t večja kot kritična vrednost za verjetnost 0,001, moremo sklepati, da so razlike mariborskih tretješolcev od splošnega nivoja zelo značilne.

74.312 *Preizkušanje razlik med aritmetičnimi sredinami.* Če izhajata vzorca 1 in 2 iz dveh normalno distribuiranih populacij z istim M in SD, se izraz

$$\frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{s_d} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} = t\,(m = n_1 + n_2 - 2) \tag{161}$$

distribuira v t-distribuciji z $m = n_1 + n_2 - 2$ stopinjami prostosti. Ta izraz moremo uporabiti za *preizkus razlik med aritmetičnimi sredinami* dveh populacij. Ničelna hipoteza je: $M_1 = M_2$; razlik v aritmetičnih sredinah ni. s_d v obrazcu 161

$$s_d^2 = \frac{(n_1 - 1)\,s_1^2 + (n_2 - 1)\,s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \tag{162}$$

je isti izraz kot v obrazcu 154, z 1 in 2 pa so zaznamovani podatki prvega in drugega vzorca. Preizkušanje hipoteze gre na povsem enak način kot preizkušanje aritmetičnih sredin.

Primer 115. Z vzorcem $n_1 = 10$ četrtošolcev in $n_2 = 10$ četrtošolk skušamo preizkusiti značilnost razlik med spoloma v zmožnostih presojanja ploskovnih odnosov.

Ničelna hipoteza: razlik med spoloma ni: $M_1 = M_2$.

Vzorci so dali naslednje rezultate:

četrtošolci .... $n_1 = 10$; $\bar{x}_1 = 44{,}4$; $K_1 = 394{,}4$

četrtošolke .... $n_2 = 10$; $\bar{x}_2 = 46{,}8$; $K_2 = 253{,}6$

Glede na obrazec 154 izračunamo

$$s_d^2 = \frac{K_1 + K_2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{394{,}4 + 253{,}6}{10 + 10 - 2} = 36;\; s_d = 6$$

Če vstavimo podatke vzorcev v obrazec 161, dobimo:

$$\frac{46{,}8 - 44{,}4}{6}\sqrt{\frac{10 \cdot 10}{10 + 10}} = 0{,}885 = t;\quad m = 10 + 10 - 2 = 18.$$

Iz tabele t-distribucije dobimo kritično vrednost $t_{0,025}\,(m = 18) = 2{,}101$.

Ker je izračunana vrednost t manjša od kritične vrednosti $t_{0,025}$, preizkus ni pokazal značilnih razlik v zmožnostih ploskovnega presojanja med dečki in deklicami.

74.32 Preizkušanje hipoteze o varianci.

74.321 Če izhaja vzorec iz normalne populacije z varianco σ_H^2, se izraz

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_H^2} = \chi^2\,(m = n - 1) \tag{163}$$

distribuira v χ^2-distribuciji z $m = n - 1$ stopinjami prostosti. Kritični interval za χ^2 je v mejah 0 do χ_P^2 (riziko P). Zaradi tega je kritični interval določen kar s kritično vrednostjo χ_P^2, ki je za posamezne nivoje dana v tabeli χ^2-distribucije. Pravo vrednost variance smatramo na nivoju P značilno različno od hipotetične σ_H^2, če je $\chi^2 > \chi_P^2$; χ^2 = izračunana vrednost, χ_P^2 = kritična vrednost.

Primer 115. Preizkusiti je treba, ali je učinek individualnih faktorjev, ki vplivajo na zmožnost presojanja mehanskih odnosov pri dijakih klasične gimnazije v Mariboru, značilno različen od splošnega nivoja učinka individualnih faktorjev. Parameter, ki meri jakost učinka individualnih faktorjev, je varianca. Zaradi tega bomo problem rešili s preizkusom variance. Varianca zmožnosti presojanja mehanskih odnosov tretješolcev v LRS je $\sigma_H^2 = 123{,}8$. To vrednost smatramo kot ničelno hipotezo za preizkus mariborskih dijakov. V vzorec smo vzeli $n = 20$ tretješolcev mariborske klasične gimnazije. Iz njega smo ocenili varianco $s^2 = 49{,}9$.

Iz teh podatkov moremo izračunati

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_H^2} = \frac{(20-1)\,49{,}9}{123{,}8} = 7{,}66 \qquad m = n-1 = 20-1 = 19$$

Iz tablic χ^2 — distribucije dobimo pod $m = 19$

$$\chi^2_{0,95}\,(m = 19) = 10{,}117$$

To pomeni, da z verjetnostjo 0,05 χ^2 ni manjši od 10,117. Če kritični interval omejimo v spodnji meji, moremo kot kritični interval smatrati interval od 10,117 do $+\infty$. Ker izračunana vrednost $\chi^2 = 7{,}66$ pade izven tega intervala, ker je manjša kot 10,117, moremo s 5% rizikom sklepati, da so razlike v variancah značilne. Prava vrednost variance dijakov mariborske klasične gimnazije je značilno manjša od splošne. To je razumljivo, ker so pogoji teh bolj izenačeni kot pogoji vseh tretješolcev v LRS.

74.322 *Preizkušanje razlik med variancami.* Če izhajata vzorec 1 in 2 iz dveh normalno distribuiranih populacij z enakima variancama, se izraz

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} = F\,(m_1 = n_1 - 1;\; m_2 = n_2 - 1) \tag{164}$$

distribuira v F-distribuciji z $m_1 = n_1 - 1$ in $m_2 = n_2 - 1$ stopinjami prostosti. S tem izrazom moremo preizkušati značilnost razlik varianc dveh populacij. Ničelna hipoteza je v tem primeru: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$. Da moremo v vsaki situaciji uporabljati v dodatku dane tabele F-distribucije, moramo kot 1 vedno vzeti vzorec z večjo oceno variance, tako da je v vsakem primeru kvocient s_1^2/s_2^2 večji kot 1.

Nadaljnji postopek preizkušanja hipoteze o razliki med variancami izvršimo tako, da iz vzorcev izračunani izraz 164 primerjamo s kritično vrednostjo $F_P\,(m_1 = n_1 - 1;\, m_2 = n_2 - 1)$. Če je $F > F_p$, so razlike v variancah značilne, v nasprotnem primeru pa razlike niso značilne.

Primer 117. Preizkusiti je treba, ali so razlike v učinku individualnih vplivov med dečki in deklicami v zmožnosti presojanja mehanskih odnosov. Ničelna hipoteza: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$. Za ta namen smo vzeli vzorec $n_1 = 12$ dečkov in $n_2 = 16$ deklic, zanje z objektivnim testom merili zmožnost presojanja mehanskih odnosov in iz dobljenih podatkov izračunali $s_1^2 = 71{,}5$; $s_2^2 = 68{,}0$. Iz obrazca 164 izračunamo

$$F = s_1^2/s_2^2 = 71{,}5/68{,}0 = 1{,}05$$

Stopinje prostosti so: $m_1 = n_1 - 1 = 12 - 1 = 11$; $m_2 = n_2 - 1 = 16 - 1 = 15$; tablični $F_{0,05}\,(m_1 = 11;\, m_2 = 15) = 2{,}51$.

Ker je $F < F_P$, so razlike v variancah neznačilne.

74.33 Preizkušanje hipotez o korelacijskem koeficientu.

74.331 Hipotetično vrednost r_H preizkušamo na splošno po naslednjem postopku, ki nam je v principu znan že iz ocenjevanja mej zaupanja korelacijskega koeficienta.

a) Iz vzorca izračunamo oceno korelacijskega koeficienta r.

b) Iz tabele zvez med r in Fisherjevim koeficientom Z poiščemo r in r_H ustrezajoči vrednosti Z in Z_H.

c) Izračunamo izraz

$$(Z - Z_H)\sqrt{n-3} = z \tag{165}$$

ki se distribuira standardizirano normalno.

d) Prava vrednost korelacijskega koeficienta r_0 je na nivoju P značilno različna od hipotetične vrednosti r_H, če je absolutna vrednost izračunanega z večja od kritične vrednosti z_P.

Primer 118. Z vzorcem $n = 20$ tretješolcev je treba preizkusiti, ali je korelacijski koeficient med zmožnostmi presojanja mehanskih in spacialnih odnosov značilno različen od $r_H = 0{,}50$.

Z vzorcem $n = 20$ tretješolcev smo dobili oceno korelacijskega koeficienta $r = 0{,}76$.

Iz tablice r—Z dobimo: za $r = 0{,}76$ je $Z = 1{,}00$; za $r_H = 0{,}50$ je $Z_H = 0{,}55$. S temi podatki izračunamo izraz 165

$$z = (1{,}00 - 0{,}55)\sqrt{20-3} = +1{,}86$$

$$z_{0,10} = 1{,}645, \qquad z_{0,05} = 1{,}96$$

zato moremo z rizikom 0,10 sklepati, da je prava vrednost korelacijskega koeficienta r_0 značilno različna od hipotetične vrednosti $r_H = 0{,}50$. Riziko tega sklepa je velik, in sicer 10 %.

74.332 Če dva pojava *nista v korelaciji*, populacija pa je normalno distribuirana, se izraz

$$r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}} = t\,(m = n-2) \tag{166}$$

distribuira v t-distribuciji z $m = n - 2$ stopinjami prostosti. S tem izrazom moremo torej preizkušati eksistenco korelacije, in sicer z ničelno hipotezo $r_H = 0$. Če je dobljeni izraz 166 večji od kritične vrednosti t_P, smatramo korelacijo kot značilno različno od $r_H = 0$ na nivoju rizika $2P$.

Primer 119. Iz vzorca $n = 16$ četrtošolk smo dobili, da je korelacijski koeficient med zmožnostjo presojanja mehanskih in besednih odnosov ocenjen z $r = -0{,}43$. Ali je korelacijski koeficient med tema pojavoma značilno različen od nič, bomo preizkusili z obrazcem 166.

Iz danih podatkov dobimo:

$$t = -0{,}43 \sqrt{\frac{16 - 2}{1 - 0{,}43^2}} = -1{,}78; \quad m = n - 2 = 16 - 2 = 14$$

Kritična vrednost $t_{0,05}$ $(m = 14) = 2{,}145$.

Ker je absolutna vrednost izračunanega t manjša od kritične vrednosti t_P, korelacija med tema dvema pojavoma ni značilna.

74.333 *Preizkušanje razlik med korelacijskimi koeficienti.* Ker se iz r izračunan Fisherjev Z distribuira normalno, se izraz

$$\frac{Z_2 - Z_1}{\sqrt{\frac{1}{n_1 - 3} + \frac{1}{n_2 - 3}}} = z \tag{167}$$

distribuira standardizirano normalno $N(0{,}1)$, če sta vzorca 1 in 2 vzeta iz populacij z enakima korelacijama. Ničelna hipoteza: korelacijska koeficienta $r_{H1} = r_{H2}$. Preizkušanje značilnosti gre dalje po običajnem postopku preizkušanja hipotez z izrazi, ki se distribuirajo kot z.

Primer 110. Iz vzorca $n_1 = 40$ tretješolcev smo ocenili korelacijski koeficient med zmožnostmi presojanja mehanskih in spacialnih odnosov z $r_1 = 0{,}65$, iz vzorca $n_2 = 60$ četrtošolcev pa z $r_2 = 0{,}79$. Preizkusiti je treba značilnost razlik med korelacijskima koeficientoma tretješolcev in četrtošolcev.

Iz tabele F dobimo k $r_1 = 0{,}65$ ustrezajočo vrednost $Z_1 = 0{,}78$, k $r_2 = 0{,}79$ pa $Z_2 = 1{,}07$. Iz n_1, Z_1, n_2 in Z_2 izračunamo izraz 167

$$z = \frac{1{,}07 - 0{,}78}{\sqrt{\frac{1}{40 - 3} + \frac{1}{60 - 3}}} = +1{,}37$$

Ker je absolutna vrednost izračunanega z manjša od kritične vrednosti $z_P = 1{,}96$, razlike med korelacijskima koeficientoma tretje- in četrtošolcev niso značilne.

74.4 Neparametrično preizkušanje hipotez

74.41 Preizkus χ^2. V dosedanjih primerih smo preizkušali hipoteze o lastnostih populacij s preizkušanjem hipotez o parametrih, kot so aritmetična sredina, varianca, korelacijski koeficient, strukturni odstotek in podobno. Ta način pa ni vedno možen. Znaki, ki jih proučujemo, niso vedno numerični, kar onemogoča izračunavanje parametra, morejo pa nastopiti tudi drugi vzroki, zaradi katerih uporaba dosedanjih metod ni možna. Za te primere pride v poštev preizkušanje hipotez o frekvenčni distribuciji znaka s preizkusom χ^2.

Če iz populacije, za katero ima frekvenčna distribucija frekvence f_H, slučajno izvlečemo vzorec, za katerega so frekvence f, se izraz

$$\sum \frac{(f - f_H)^2}{f_H} = \chi^2 (m = k - 1) \tag{168}$$

distribuira v χ^2-distribuciji z $m = k - 1$ stopinjami prostosti, pri čemer pomeni k število razredov frekvenčne distribucije.

Kot smo videli v odstavku 66.1, moremo χ^2 izračunati tudi po obrazcu

$$\sum \frac{f^2}{f_H} - n = \chi^2 (m = k - 1) \tag{169}$$

ki je samo preurejen obrazec 168, je pa računsko dostikrat preprostejši.

Preizkus značilnosti razlik dejanskih frekvenc f od teoretične — hipotetične distribucije f_H izvedemo z običajnim postopkom. Iz podatkov vzorca izračunamo po obrazcu 168 ali 169 χ^2, ki ga primerjamo s kritično vrednostjo χ^2_P za riziko P. Če je izračunani χ^2 večji od kritične vrednosti χ^2_P, so razlike dejanske distribucije od hipotetične značilno različne, v obratnem primeru pa razlike niso značilne. Kot ničelno hipotezo postavljamo, da je prava frekvenčna distribucija identična s hipotetično: $f_0 = f_H$.

Ker je χ^2 distribucija dobra aproksimacija dejanske distribucije izraza 168 samo, če so hipotetične frekvence f_H zadosti velike, običajno postavljamo omejitev, da nobena izmed hipotetičnih frekvenc ni manjša kot 5. Če se v praktičnem primeru to zgodi, ta razred združimo z najsorodnejšim.

Primer 121. Rezultate doseženih točk pri testiranju zmožnosti presojanja mehanskih odnosov četrtošolk v gimnazijah z enim četrtim oddelkom v LR Sloveniji, smo uredili v frekvenčno distribucijo f. Preizkusiti je treba, ali je distribucija teh dosežkov značilno različna od normalne distribucije f_H z isto aritmetično sredino M in istim standardnim odklonom SD. Hipotetično frekvenčno distribucijo f_H s temi lastnostmi dobimo v tabeli 25. Postopek izračunavanja izraza, ki se distribuira kot χ^2, pa imamo v tabeli 49.

Ker imamo skupno $k = 10$ grup, je bilo po zgornjem pravilu število stopinj prostosti $n = k - 1 = 10 - 1 = 9$. Ker pa sta distribuciji vezani z dvema količinama ($\bar{x}$, s) se število stopinj prostosti zmanjša za dve: ($m = 9 - 2 = 7$). Sedmim stopinjam prostosti ustrezajoča kritična vrednost χ^2 pa je: $\chi^2_{0,05} (m = 7) = 14{,}07$.

Ker je izračunana vrednost $\chi^2 = 3{,}756$ manjša od ustrezajoče kritične vrednosti $\chi^2_{0,05} = 14{,}07$, sklepamo, da stvarna distribucija dosežkov mehanskega testa ni značilno različna od normalne distribucije.

Tabela 49. Preizkušanje značilnosti razlik frekvenčne distribucije mehanskega testa od normalne distribucije (četrtošolci v LRS)

x	f		f_H		$f-f_H$	$(f-f_H)^2$	$(f-f_H)^2/f_H$
—9 do —5	1	6	1,3	5,1	+ 0,9	0,81	0,159
—4 do 0	5		3,8				
1 do 5	11		10,7		+ 0,3	0,09	0,008
6 do 10	21		24,8		—3,8	14,44	0,582
11 do 15	45		43,1		+ 1,9	3,61	0,084
16 do 20	61		61,4		—0,4	0,16	0,003
21 do 25	72		67,3		+ 4,7	22,09	0,328
26 do 30	52		56,9		—4,9	24,01	0,423
31 do 35	38		39,3		—1,8	1,69	0,043
36 do 40	26		20,5		+ 5,5	30,25	1,474
41 do 45	7	10	8,8	12,9	—2,9	8,41	0,652
46 do 50	3		4,1				
	342		342,0		0,0		$3{,}756 = \chi^2$

Primer 122. Hitrost izdelave poizkusnih ključev 493 delavcev kovinske stroke je bila kategorizirana v tri grupe: počasen, zmeren in hiter. Preizkusiti je treba, ali se dobljena distribucija po hitrosti značilno odklanja od teoretične. Ta je zasnovana na predpostavki, da je hitrost izdelave poizkusnih ključev normalno distribuirana in da so v grupi »zmeren« vsi, ki se od povprečja odklanjajo manj kot *SD*, v grupi »počasen« oziroma »hiter« pa vsi, ki se odklanjajo v levo oziroma desno za več kot *SD*. Teoretična oziroma hipotetična distribucija 493 delavcev bi imela po tej predpostavki v grupi »počasen« 15,9 % ali v absolutnem 78,3 delavca, v grupi »zmeren« 68,2 % ali 336,4 delavca in v grupi »hiter« 15,9 % ali 78,3 delavca.

Postopek preizkušanja te hipoteze je naslednji:

Tabela 50. Preizkušanje značilnosti razlik dejanske distribucije izdelave poizkusnih ključev od teoretične

Hitrost	f	f_H	f^2	f^2/f_H
Počasen	39	78,3	1521	19,42
Zmeren	280	336,4	78400	233,06
Hiter	174	78,3	30276	386,66
	493	493,0		639,14
				—493,00
				$146{,}14 = \chi^2$

$m = k - 1 = 3 - 1 = 2.$

Kritična vrednost χ^2 za riziko 0,001 je $\chi^2_{0{,}001}\ (m = 2) = 13{,}815$. Dejansko uporabljeni kriterij ocenjevanja hitrosti je zelo visoko značilno različen od teoretičnega kriterija na osnovi hipoteze o normalnosti distribucije.

74.42 χ^2 preizkus neodvisnosti

74.421 *Preizkus χ^2 za kontingenčno tabelo $k \times g$.* S χ^2 moremo preizkušati tudi značilnost odvisnosti dveh znakov. Pri obravnavanju kontingence smo vzeli kot merilo kontingence χ^2, ki smo ga izračunavali tako, da smo stvarne frekvence primerjali s teoretičnimi. Teoretične frekvence pa smo izračunali pod predpostavko neodvisnosti med proučevanima pojavoma. V tem poglavju smo dali tudi praktične napotke in postopke izračunavanja χ^2. Zaradi tega na tem mestu teh postopkov ne bomo ponavljali. Izkaže se, da se izraz χ^2, ki smo ga v teh odstavkih izračunavali kot merilo kontingence, distribuira v χ^2-distribuciji z $m = (k - 1) \cdot (g - 1)$ stopinjami prostosti. Od $k \cdot g$ frekvenc v kontingenčni tabeli jih more namreč $(k - 1) \cdot$ $\cdot (g - 1)$ svobodno variirati, ostale pa so vezane na robne frekvence. Ostali postopek preizkušanja značilnosti odvisnosti je enak običajnemu postopku preizkušanja hipotez s pomočjo χ^2.

Primer 123. Pri proučevanju soročnosti izdelave poizkusnih ključev 493 delavcev smo v primeru 65 izračunali, da je $\chi^2 = 15{,}41$. Kvaliteta izdelkov je bila izkazana v treh grupah: nadpovprečna, povprečna in podpovprečna, hitrost pa v treh grupah: počasen, zmeren in hiter. Število stopinj prostosti je $m = (k - 1) \cdot (g - 1) =$ $= (3 - 1) \cdot (3 - 1) = 4$. Kritična vrednost $\chi^2_{0,01}$ $(m = 4) = 13{,}277$. Iz tega moremo zaključiti, da sta hitrost in kvaliteta izdelave poizkusnih ključev značilno odvisna na nivoju 0,01.

Primer 124. V primeru 67 smo izračunali, da je χ^2 med dejansko barvo eksponiranih predmetov in izjavami štiriletnih otrok o barvi predmeta $\chi^2 = 9{,}54$. Ker imamo štiri barve, odgovore o pravilnosti pa dane alternativno: pravilno — nepravilno, je število stopinj prostosti $m = (k - 1) \cdot (g - 1) = (4 - 1) \cdot (2 - 1) = 3$. Kritična vrednost χ^2_P je po tablici χ^2-distribucije enaka $\chi^2_{0,05}$ $(m = 3) = 7{,}815$. Ker je izračunana vrednost $\chi^2 = 9{,}54$ večja od kritične vrednosti $\chi^2_{0,05}$ $(m = 3) = 7{,}815$, moremo s 5 % rizikom sklepati, da je zmožnost zaznavanja posameznih barv pri štiriletnih dečkih različna po barvah.

74.422 *Preizkus χ^2 za kontingenčno tabelo 2×2.* Če je v primerih preizkušanja odvisnosti iz 2×2 tabele katera koli od teoretičnih — hipotetičnih frekvenc majhna (manjša od 50), je priporočljivo, da uporabimo pri χ^2-preizkusu Yatesovo korekturo za zveznost. Ta obstoji v tem, da absolutne vrednosti vsakega izmed odklonov $f - f_H$ pred kvadriranjem zmanjšamo za 0,5. χ^2 izračunamo v tej korigirani obliki po obrazcu

$$(|f - f_H| - 0{,}50)^2 \left[\sum \frac{1}{f_H}\right] = \chi^2 (m = 1) \tag{170}$$

$|f - f_H|$ = absolutna razlika frekvenc katerega koli polja, ker so med seboj enake.

Primer 125. Pri raziskavi o zmožnosti zaznavanja likov je bila za zaznavanje trikotnika za štiriletne otroke dobljena distribucija, ki je prikazana v tabeli 51a. Tabela 51b prikazuje hipotetične frekvence v primeru neodvisnosti.

Tabela 51. Preizkušanje odvisnosti zaznavanja trikotnika od spola pri štiriletnih otrocih

a)

f	Dečki	Deklice	
prav	40	33	73
narobe	40	47	87
	80	80	160

b)

f_H	Dečki	Deklice	
prav	36,5	36,5	78,0
narobe	43,5	43,5	73,0
	80,0	80,0	160,0

Po obrazcu 170 izračunamo

$$\chi^2 = (|40 - 36{,}5| - 0{,}5)^2 \left[\frac{1}{36{,}5} + \frac{1}{43{,}5} + \frac{1}{36{,}5} + \frac{1}{43{,}5}\right] = 0{,}907$$

Kritična vrednost $\chi^2_{0,05}\,(m = 1) = 3{,}841$. Izračunana vrednost χ^2 je manjša od kritične vrednosti χ^2_P, razlike v zaznavanju trikotnika po spolu ne moremo smatrati kot značilne.

V primeru, da je število enot za en znak za obe grupi *enako*, moremo χ^2 z upoštevanjem Yatesove korekture izračunavati po enostavnejšem obrazcu

$$\frac{(|a - b| - 1)^2 \cdot n}{(a + b) \cdot (c + d)} = \chi^2\,(m = 1) \tag{171}$$

Pri tem so: $\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$ stvarne frekvence, postavljene tako, da je $a + c = b + d$.

Primer 125. Za podatke iz primera 124 moremo uporabiti ta način, ker je število preizkusov dečkov enako številu preizkusov deklic ($n_1 = n_2 = 80$).

Tabela 52. Preizkušanje odvisnosti zaznavanja trikotnika od spola pri štiriletnih otrocih

	Dečki	Deklice	
prav	40	33	73
narobe	40	47	87
	80	80	160

Po obrazcu 171 je:

$$\chi^2 = \frac{(|40 - 33| - 1)^2 \cdot 160}{73 \cdot 87} = 0{,}907$$

Rezultat je isti kot v primeru 124.
Nadaljnji postopek je enak kot v primeru 124.

75. Analiza variance

75.1 Princip

Dosedanja metoda preizkušanja značilnosti vpliva danega faktorja je obstajala v tem, da smo preizkušali značilnost razlik aritmetičnih sredin dveh grup pod spremenjenimi pogoji. Metoda je torej omejena na medsebojno primerjavo samo dveh grup. Dostikrat pa gre za analizo učinka določenega faktorja na več grup, na primer več starostnih skupin, več socioekonometričnih grup, več tipov šol itd., kadar analiziramo odvisnost pojava od starosti, od socialnih skupin, vrste šol itd. Z zgornjo metodo je taka analiza možna le s kompleksnim preizkušanjem razlik vseh kombinacij po dve grupi. Taka analiza pa je zamudna, nepregledna in neizčrpna. Kompleksno moremo to nalogo rešiti edinole z analizo variance, ki hkrati analizira značilnost razlik vseh možnih kombinacij.

Že pri obravnavanju variance kot mere variabilnosti smo ugotovili, da moremo skupno varianco razstaviti na vsoto komponent glede na učinek posameznih faktorjev. Na enako rešitev smo naleteli tudi pri proučevanju korelacije, ko smo celotno varianco koreliranega znaka razdelili v dva dela: varianco, ki izvira iz odvisnosti koreliranega znaka z znakom, s katerim je povezan, in preostalo varianco, ki gre na račun drugih — individualnih in slučajnih faktorjev. Ta princip razstavljanja variance, samo dalje razvit in prilagojen načinu preizkušanja hipotez z vzorci, je osnova analize variance v ožjem smislu.

Analiza variance ni omejena na preizkušanje značilnosti učinka enega samega faktorja, temveč moremo z njo istočasno analizirati značilnost učinkov poljubnega števila faktorjev vključno vzajemne učinke — interakcije.

Analiza variance v vseh njenih različnih oblikah in modelih je izdelana in uporabna z osnovno predpostavko, da je učinek slučajnih faktorjev distribuiran normalno z enako variabilnostjo za vse enote proučevanja.

75.2 Analiza variance enega faktorja

75.21 Analizo variance značilnosti vpliva enega samega faktorja izvršimo po naslednjem postopku:

a) Iz vsake izmed grup, ki jih analiziramo, slučajno izberemo določeno število enot n_1. V tem enostavnem primeru ni nujno, da je število enot v vseh grupah enako, čeprav je to ugodno iz vsebinskih in tehničnih razlogov obračunavanja. Če imamo gradivo, ki ga analiziramo, že dano, pustimo število enot v posameznih grupah tako, kot je. Če pa eksperiment šele planiramo, se bomo v vseh primerih, če le drugi razlogi ne narekujejo drugače, odločili za enako število enot v grupah.

b) Od izbranih enot v grupah zberemo osnovne podatke, ki so kvantitativen izraz pojava, ki ga hočemo analizirati (shema 172)

$$x_{1i} \tag{172}$$

c) Podatke po grupah seštejemo, da dobimo grupne vsote X_1, te pa seštejemo v skupno vsoto X (shema 173)

$$\begin{array}{c|c} x_{1i} & X_1 \\ \hline & X \end{array} \tag{173}$$

d) Vse individualne podatke x_{1i}, vse grupne vsote X_1 in skupno vsoto X kvadriramo in damo v tabeli kvadratov (shema 174)

$$\begin{array}{c|cc} x_{1i}^2 & X_1^2 & X_1^2/n_1 \\ \hline & X^2 & X_1^2/n \end{array} \tag{174}$$

e) Kvadrate grupnih vsot delimo z ustrezajočim številom enot v grupah — n_1, kvadrat skupne vsote pa s skupnim številom enot v celoti — n (shema 174).

f) Seštejemo vse kvadrate individualnih podatkov in vse grupne izraze X_1^2/n_1 iz sheme 174. Tako dobimo količine Q_{1i}, Q_1 in Q (shema 175)

$$\begin{array}{c|c} \Sigma x_{1i}^2 = Q_{1i} & \Sigma X_1^2/n_1 = Q_1 \\ \hline & X^2/n = Q \end{array} \tag{175}$$

g) Analizo variance obračunamo iz teh količin po standardni shemi 176 za analizo variance enega faktorja v tabeli 53.

Tabela 53. Shema obračunavanja analize variance enega faktorja

Vir variacije	Vsota kvadratov K	Stopinje prostosti m	Ocena variance $s^2 = K/m$	F	
Faktor 1	$Q_1 - Q = K_1$	$p - 1$	$s_1^2 = K_1/(p-1)$	$F = s_1^2/s_e^2$	(176)
Pogreška e	$Q_{1i} - Q_1 = K_e$	$n - p$	$s_e^2 = K_e/(n-k)$	1	
Skupaj	$Q_{1i} - Q = K$	$n - 1$			

h) Če razlik med pravimi grupnimi sredinami ni, je $\sigma_1^2 = 0$; faktor 1 torej ni bistven. V tem primeru se $F = s_1^2/s_e^2$ distribuira v F-distribuciji z $m_1 = p - 1$; $m_2 = n - p$ stopinjami prostosti, pri čemer pomeni p število grup. Če je faktor 1 bistven, je s_1^2 ocena vsote variance aritmetičnih sredin in variance individualnih vplivov, s_e^2 pa ocena variance individualnih vplivov.

i) Zaradi tega moremo z zgornjim postopkom preizkušati ničelno hipotezo, da faktor 1 ni bistven, da je torej $\sigma_1^2 = 0$. Da ugotovimo značilnost razlik med sredinami, izračunani F primerjamo s kritično vrednostjo $F_P\,(m_1 = p - 1;\ m_2 = n - p)$. Če je $F > F_P$, so razlike med aritmetičnimi sredinami z rizikom P značilne, v nasprotnem primeru pa razlike niso značilne na nivoju P.

j) V primeru značilnosti razlik so $\bar{x}_1 = X_1/n_1$ ocene grupnih aritmetičnih sredin. Verjeten odklon aritmetične sredine od ocene je z rizikom $2P$ enak $e_{\bar{x}_1}$ (po obrazcu 177)

$$e_{\bar{x}_1} = t_P\,(m = n - p)\, s_e / \sqrt{n_1} \tag{177}$$

verjeten odklon razlike med dvema aritmetičnima sredinama grup pa je dan z rizikom $2P$ z obrazcem

$$e_{\Delta\bar{x}} = t_P\,(m = n - p)\, s_e \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}} \tag{178}$$

Primer 127. Preizkusiti je treba značilnost odvisnosti dosežkov z Ravenovimi matricami po starosti (dijaki v starosti od 16 do 19 let). Nalogo bomo rešili z analizo variance. V ta namen imamo za 26 dijakov na razpolago naslednje podatke o dosežkih po starosti.

Tabela 54. Tabela osnovnih podatkov o dosežkih dijakov v starosti od 16 do 19 let, ki so jih dosegli z Ravenovimi matricami

Grupa	Starost	x_{1i}	X_1	n_1
1	16 let	33, 48, 48, 36, 48, 51, 49, 48	361	8
2	17 let	53, 49, 47, 45, 51, 54	299	6
3	18 let	54, 52, 41, 48, 56	251	5
4	19 let	51, 49, 49, 45, 57, 50, 51	352	7
			$X = 1263$	$n = 26$ $p = 4$

Tabela 55. Tabela kvadratov analize variance iz tabele 54

Grupa	x_{1i}^2	$X_1^2 : n_1 = X_1^2/n_1$
1	1089 2304 2304 1296 2304 2601 2401 2304	130321 : 8 = 16290,1
2	2809 2401 2209 2025 2601 2916	89401 : 6 = 14900,2
3	2916 2704 1681 2304 3136	63001 : 5 = 12600,2
4	2601 2401 2401 2025 3249 2500 2601	123904 : 7 = 17700,6
	$Q_{1i} = 62083$	$Q_1 = \Sigma X_1^2/n_1 = 61491,1$

$X^2/n = 1595169 : 26 = 61352,7 = Q$

Iz teh podatkov moremo po shemi 176 obračunati analizo variance.

Tabela 56. Analiza variance odvisnosti dosežkov z Ravenovimi matricami po starosti

Vir variacije	Vsota kvadratov K	Stopinje prostosti m	Ocena variance s^2	F
Starost	$K_1 = 61491{,}1 - 61352{,}7 = 138{,}4$	$4 - 1 = 3$	$s_1^2 = 46{,}13$	1,73
Pogreška	$K_e = 62083 - 61491{,}1 = 591{,}9$	$26 - 4 = 22$	$s_e^2 = 26{,}90$	1
Skupaj	$K = 62083 - 61352{,}7 = 730{,}3$	$26 - 1 = 25$		

V tablici F-distribucije dobimo $F_{0,05}\,(m_1 = 3;\ m_2 = 22) = 3{,}05$. Primerjava izračunanega $F = 1{,}73$ s tablično vrednostjo $F_P = 3{,}05$ pokaže neznačilnost razlik med leti.

75.22 Skrajšan postopek. Često se pri obračunavanju analize variance obnese postopek, ki znatno skrči računski postopek. Pri izračunavanju variance se končni rezultat ne spremeni, če pred kvadriranjem individualnim vrednostim odštejemo poljubno vrednost (običajno okroglo, ki zmanjša osnovne vrednosti). Isto velja tudi za analizo variance. Ta postopek je posebno koristen, če variacija vrednosti ni prevelika. V tem primeru vpeljemo pomožno vrednost x_0, ki je tem vrednostim blizu. Postopek obračunavanja variance, kot je dan v 75.21, se spremeni le toliko, da med točko b in c vstavimo novo točko: Individualne podatke moremo brez škode za končni rezultat reducirati tako, da od njih odštejemo okroglo vrednost x_0, ves ostali postopek pa vršimo z reduciranimi vrednostmi namesto z originalnimi, kot je navedeno v zgornjem postopku.

Primer 128. Za podatke primera 127 se ta postopek obnese. Kot vidimo na prvi pogled, variabilnost osnovnih podatkov v tabeli 54 ni velika. Kot ugodna vrednost za reduciranje se izkaže $x_0 = 50$. Ne bomo ponavljali osnovnih podatkov, temveč bomo dali kar tabelo reduciranih podatkov.

Primerjava dobljenih K_1 in K_e pokaže enakost rezultatov po obeh postopkih, ker je nadaljnji potek enak zgornjemu.

Tabela 57. a) Tabela reduciranih osnovnih podatkov testiranja z Ravenovimi matricami iz tabele 54

Grupa	Starost	x_{1i}	X_1
1	16 let	$-17\ \ -2\ \ -2\ \ -14\ \ -2\ \ +1\ \ -1\ \ -2$	-39
2	17 let	$+3\ \ -1\ \ -3\ \ -5\ \ +1\ \ +4$	-1
3	18 let	$+4\ \ +2\ \ -9\ \ -2\ \ +6$	$+1$
4	19 let	$+1\ \ -1\ \ -1\ \ -5\ \ +7\ \ 0\ \ +1$	$+2$
			$X = -37$

b) Tabela kvadratov reduciranih podatkov

Grupa	x_{1i}^2								$X_1^2 : n_1 = X_1^2/n_1$
1	287	4	4	196	4	1	1	4	1521 : 8 = 190,1
2	9	1	9	25	1	16			1 : 6 = 0,2
3	16	4	81	4	36				1 : 5 = 0,2
4	1	1	1	25	49	0	1		4 : 7 = 0,6
	$Q_{1i} = 783$								$Q_1 = 191{,}1$

$$X^2 = 1369 : 26 = 52{,}7 = Q$$

$$K_1 = Q_1 - Q = 191{,}1 - 52{,}7 = 138{,}4; \quad K_e = Q_{1i} - Q_1 = 783 - 191{,}1 = 591{,}9$$

75.3 **Analiza variance več faktorjev hkrati**

75.30 Pojem. Analiza variance ni omejena samo na analizo enega faktorja, ampak moremo z njo analizirati tudi zamotanejše in kompleksnejše probleme o vplivih več faktorjev. Pri analizah več faktorjev hkrati po pravilu jemljemo število enot v grupah enako (zaznamujemo ga z $\bar{n}$). Moremo pa pri faktorialni analizi vzeti v vsaki grupi tudi po en sam podatek ($\bar{n} = 1$).

Računski postopek obračunavanja analize variance se sicer menja s številom faktorjev in komponent, ki jih upoštevamo, vendar veljajo neki splošni principi, ki omogočajo, da moremo v vsakem konkretnem primeru najti primeren model analize variance.

Pri analizi več faktorjev nastopi nov pojem *interakcije*, to je vzajemnega delovanja dveh ali več faktorjev. Uspeh pri učenju je odvisen od spola in starosti, spremembe uspeha po starosti pa morejo biti različne za dečke in deklice. To vzajemno delovanje obeh faktorjev imenujemo interakcijo. V kompleksnejših analizah moremo govoriti tudi o interakciji več faktorjev.

Če vzamemo, da je neki pojav: a) odvisen od enega faktorja 1, b) odvisen od dveh faktorjev 1 in 2, c) odvisen od treh faktorjev 1, 2 in 3 in slučajnih vplivov e, ki se distribuirajo normalno, moremo x, ki je kvantitativen izraz delovanja vseh faktorjev, pisati v shemah 179

$$\begin{aligned}
&\text{a)}\ x_1 = M + M_1 + e_{1i} \\
&\text{b)}\ x_{12i} = M + M_1 + M_2 + I_{12} + e_{12i} \qquad (179)\\
&\text{c)}\ x_{123i} = M + M_1 + M_2 + M_3 + I_{12} + I_{13} + I_{23} + I_{123} + e_{123i}
\end{aligned}$$

Pri tem pomeni: M = rezultat splošnih pogojev; M_1, M_2, M_3 = samostojni učinki faktorjev 1, 2, 3; I_{12}, I_{13}, I_{23} = interakciji dveh faktorjev; I_{123} = interakcija treh faktorjev; e_{1i}, e_{12i}, e_{123i} = učinek slučajnih faktorjev. Seveda ti modeli veljajo samo za primer aditivne povezave učinkov, kot je nakazano v shemi 179.

Ničelne hipoteze, s katerimi preizkušamo značilnost učinka enega ali drugega faktorja ali komponente, so:

$$M_1 = M_2 = M_3 = 0; \quad I_{12} = I_{13} = I_{23} = 0; \quad I_{123} = 0$$

Če ničelne hipoteze veljajo, je:

$$\text{a) } x_{1i} = M + e_{1i}; \quad \text{b) } x_{12i} = M + e_{12i}; \quad \text{c) } x_{123i} = M + e_{123i} \tag{180}$$

75.31 Analiza variance dveh in treh faktorjev. Postopek obračuna analize variance v primeru treh faktorjev je naslednji:

a) Zberemo podatke x po kombinaciji vseh grup faktorjev 1, 2 in 3; x_{123i}

b) Če se izkaže kot koristno, reduciramo vse podatke v tabeli osnovnih podatkov tako, da odštejemo od njih primerno okroglo vrednost x_0.

c) Poiščemo vse mogoče grupne vsote reduciranih podatkov: X_{123}, X_{12}, X_{12}, X_{23}, X_1, X_2, X_3, X. To so po vrsti: grupne vsote po kombinaciji treh faktorjev (X_{123}), grupne vsote po vseh kombinacijah po dva faktorja (X_{12}, X_{13}, X_{23}), grupne vsote po enem faktorju (X_1, X_2, X_3) in skupna vsota vseh podatkov (X).

d) Reducirane osnovne podatke in vse pod c) dobljene vsote reduciranih podatkov kvadriramo in vpišemo v tabelo kvadratov, ki je po obliki enaka tabeli reduciranih podatkov.

e) Seštejemo kvadrate reduciranih osnovnih podatkov in kvadrate ustrezajočih grupnih vsot. Tako dobimo naslednje vsote kvadratov: Σx^2_{23i}, ΣX^2_{123}, ΣX^2_{12}, ΣX^2_{13}, ΣX^2_{23}, ΣX^2_1, ΣX^2_2, ΣX^2_3, X^2.

f) Iz dobljenih vsot kvadratov izračunamo količine Q. Če z $\bar{n}$ zaznamujemo število enot v vsaki osnovni grupi, s p število grup po *p*rvem, z d število grup po *d*rugem, s t pa število grup po *t*retjem faktorju, dobimo količine Q po obrazcih:

$$\begin{aligned}
&Q_{123i} = \Sigma x^2_{123i}; \quad && Q_{123} = \Sigma X^2_{123}/\bar{n}; && && \qquad (181)\\
&Q_{12} = \Sigma X^2_{12}/\bar{n}t; && Q_{13} = \Sigma X^2_{13}/\bar{n}d; && Q_{23} = \Sigma X^2_{23}/\bar{n}p; &&\\
&Q_1 = \Sigma X^2_1/\bar{n}dt; && Q_2 = \Sigma X^2_2/\bar{n}pt; && Q_3 = \Sigma X^2_3/\bar{n}pt; && Q = \Sigma X^2/\bar{n}pdt
\end{aligned}$$

g) Iz Q, ki smo jih dobili z obrazci 181, dobimo dalje K po obrazcih

$$\begin{aligned}
&K = Q_{123i} - Q\\
&K_1 = Q_1 - Q; \quad K_2 = Q_2 - Q; \quad K_3 = Q_3 - Q\\
&K_{12} = Q_{12} - Q_1 - Q_2 + Q; \quad K_{13} = Q_{13} - Q_1 - Q_3 + Q;\\
&K_{23} = Q_{23} - Q_2 - Q_3 + Q\\
&K_{123} = Q_{123} - Q_{12} - Q_{13} - Q_{23} + Q_1 + Q_2 + Q_3 - Q\\
&K_e = K - K_1 - K_2 - \ldots - K_{123}.
\end{aligned} \tag{182}$$

h) Analizo variance obračunamo po standardni shemi, ki je dana v tabeli 58.

Tabela 58. Shema obračunavanja analize variance treh faktorjev (183)

Faktor j	Vsota kvadratov K_j	Stopinje prostosti m_j	Ocena variance $s_j^2 = K_j/m_j$	F $F_j = s_j^2/s_e^2$	$F_P(m_j;\ m_e)$
1	K_1	$m_1 = p-1$	$s_1^2 = K_1/m_1$	$F_1 = s_1^2/s_e^2$	$F_P(m_1;\ m_e)$
2	K_2	$m_2 = d-1$	$s_2^2 = K_2/m_2$	$F_2 = s_2^2/s_e^2$	$F_P(m_2;\ m_e)$
1×2	K_{12}	$m_{12} = (p-1)(d-1)$	$s_{12}^2 = K_{12}/m_{12}$	$F_{12} = s_{12}^2/s_e^2$	$F_P(m_{12};\ m_e)$
3	K_3	$m_3 = (t-1)$	$s_3^2 = K_3/m_3$	$F_3 = s_3^2/s_e^2$	$F_P(m_3;\ m_e)$
1×3	K_{13}	$m_{13} = (p-1)(t-1)$	$s_{13}^2 = K_{13}/m_{13}$	$F_{13} = s_{13}^2/s_e^2$	$F_P(m_{13};\ m_e)$
2×3	K_{23}	$m_{23} = (d-1)(t-1)$	$s_{23}^2 = K_{23}/m_{23}$	$F_{23} = s_{23}^2/s_e^2$	$F_P(m_{23};\ m_e)$
$1 \times 2 \times 3$	K_{123}	$m_{123} = (p-1)(d-1)(t-1)$	$s_{123}^2 = K_{123}/m_{123}$	$F_{123} = s_{123}^2/s_e^2$	$F_P(m_{123};\ m_e)$
Pogreška e	$K_e = K - \Sigma K_j$	$m_e = (\bar{n}-1)pdt$	$s_e^2 = K_e/m_e$	$F_e = 1$	—
Skupaj	K	$m = \bar{n}pdt - 1$	—	—	—

Opombe k shemi 183: a) Iz zgornje tabele za analizo variance treh faktorjev moremo priti do sheme za analizo variance samo dveh faktorjev tako, da izpustimo iz računa vse vrste, v katerih nastopa tretji faktor, v ostalih vrstah pa vstavimo $t = 1$.

b) V primeru, da je v vsaki osnovni grupi en sam podatek ($\bar{n} = 1$), vrsta za izračunavanje pogreške izgine, ker je $K_e = 0$ in $m_e = 0$. V tem primeru si pomagamo tako, da predpostavljamo, da najvišje interakcije (I_{123} v primeru, da imamo tri, in I_{12} v primeru, da imamo dva faktorja) ni, in vzamemo tem interakcijam ustrezajoče izraze v shemi analize variance kot izraze za pogreško.

c) Če se izkaže, da je s_j^2 za določen samostojen faktor ali interakcijo manjši od s_e^2, vnaprej sklepamo, da ta faktor ali interakcija ni značilna. Varianco teh faktorjev in interakcij vključimo v pogreško tako, da ustrezajoče K_j in m_j prištejemo h K_e in m_e, izračunamo nov $s_e^{2\prime}$, na osnovi novih — korigiranih K_e' in m_e', F pa s primerjavo z novim $s_e^{2\prime}$.

Primer 129. Kot primer kompleksne analize variance treh faktorjev vzemimo problem odvisnosti spoznavanja likov pri otrocih v odvisnosti od spola (faktor 1), starosti (faktor 2) in vrste lika (faktor 3). Za ta namen je bil napravljen eksperiment na predšolskih otrocih ljubljanskih vrtcev. Rezultati, ki so dani v tabeli 59, pomenijo, kolikokrat od 80 možnosti je otrok določenega spola in starosti po predpisanem času pravilno ocenil lik, ki ga je opazoval.

Računski postopek obračunavanja analize variance je naslednji:

Tabela 59. Obračunavanje analize variance o odvisnosti spoznavanja likov za faktorje spol (faktor 1), starost (faktor 2) in lik (faktor 3)

a) Tabela osnovnih podatkov

Starost v letih	Dečki □	Dečki ◇	Dečki ○	Dečki ∪	Deklice □	Deklice ◇	Deklice ○	Deklice ∪
4	31	40	45	36	30	33	37	34
4,5	43	50	40	44	51	38	58	47
5	59	49	54	68	59	59	51	64
5,5	68	61	66	64	59	68	52	55
6	60	61	58	61	63	74	61	75

Tabela reduciranih ($x_0 = 50$) osnovnih podatkov in njihove vsote (tabela b) in tabela kvadratov (tabela c) sta zaradi obširnosti na strani 171.

d) Tabela vsot kvadratov

Σx_{123}^2	ΣX_{12}^2	ΣX_{23}^2	ΣX_2^2
6084	20614	10842	39008
2394	8468	4598	16900
ΣX_{13}^2	ΣX_1^2	ΣX_3^2	ΣX^2

Kontrola vsot kvadratov: Vse vsote kvadratov morajo biti ali sode ali lihe.

e) Tabela za Q: Število grup po posameznih faktorjih: $p = 2$; $d = 5$; $t = 4$

ea)

Q_{123}	Q_{12}	Q_{23}	Q_2
6084	20614/4	10842/2	$39008/2 \cdot 4$
2394/5	$8468/5 \cdot 4$	$4598/2 \cdot 5$	$16900/2 \cdot 5 \cdot 4$
Q_{13}	Q_1	Q_3	Q

eb)

Q_{123}	Q_{12}	Q_{23}	Q_2
6084	5153	5421	4876
478,8	423,4	459,8	422,5
Q_{13}	Q_1	Q_3	Q

b) Tabela reduciranih ($x_0 = 50$) osnovnih podatkov in njihove vsote

Starost	Dečki □	Dečki ◇	Dečki ○	Dečki ∪	Deklice □	Deklice ◇	Deklice ○	Deklice ∪	X_{12} Dečki	X_{12} Deklice	X_{22} □	X_{22} ◇	X_{22} ○	X_{22} ∪	X_2
	x_{123}														
4	—19	—10	—5	—14	—20	—17	—13	—16	—48	—66	—39	—27	—18	—30	—114
4,5	—7	0	—6	—6	+ 1	—12	+ 8	—3	—19	—6	—6	—12	+ 2	—9	—25
5	+ 9	—1	+ 4	+ 18	+ 9	+ 9	+ 1	+ 14	+ 30	+ 33	+ 18	+ 8	+ 5	+ 32	+ 63
5,5	+ 18	+ 11	+ 16	+ 14	+ 9	+ 18	+ 2	+ 5	+ 59	+ 34	+ 27	+ 29	+ 18	+ 19	+ 93
6	+ 10	+ 11	+ 8	+ 11	+ 13	+ 24	+ 11	+ 25	+ 40	+ 73	+ 23	+ 35	+ 19	+ 36	+ 113
	+ 11	+ 11	+ 17	+ 23	+ 12	+ 22	+ 9	+ 25	+ 62	+ 68	+ 23	+ 33	+ 26	+ 48	+ 130
	X_{13}								X_1		X_3				X

c) Tabela kvadratov reduciranih osnovnih podatkov in njihovih vsot

x^2_{123}								X^2_{12}		X^2_{23}				X^2_2
361	100	25	196	400	289	169	196	2304	4356	1521	729	324	900	12996
49	0	36	36	1	144	64	9	361	36	36	144	4	81	625
81	1	16	324	81	81	1	196	900	1089	324	64	25	1024	3969
324	121	256	196	81	324	4	25	3481	1156	729	841	324	361	8649
100	121	64	121	169	576	121	625	1600	5329	529	1225	361	1296	12769
121	121	289	529	144	484	81	625	3844	4624	529	1089	676	2304	16900
X^2_{13}								X^2_1		X^2_3				X

Iz Q moremo na pregleden način dobiti izraze K (obrazci 182):

$K = 6084 - 422{,}5 = 5661{,}5; \quad K_1 = 423{,}4 - 422{,}5 = 0{,}9$

$K_2 = 4876 - 422{,}5 = 4453{,}5; \quad K_3 = 459{,}8 - 422{,}5 = 37{,}3$

$K_{12} = 5153 - 423{,}4 - 4876 + 422{,}5 = 276{,}1$

$K_{13} = 478{,}8 - 423{,}4 - 459{,}8 + 422{,}5 = 18{,}1$

$K_{23} = 5421 - 4876 - 459{,}8 + 422{,}5 = 507{,}7$

$K_e = 5661{,}5 - 0{,}9 - 4453{,}5 - 37{,}3 - 276{,}1 - 18{,}1 - 507{,}7 = 367{,}9$

Iz teh podatkov moremo s pomočjo sheme v tabeli 58 obračunati analizo variance.

Tabela 60. Obračun analize variance

Faktor	Vsota kvadratov K_j	Stopinje prostosti m_j	s_j^2	F_j	F_{jP}
Spol (1)	0,9	1	0,9		
Starost (2)	4453,5	4	1113,4	$F_2 = 49{,}7$	$F_{0,01}(4,19) = 4{,}50$
Lik (3)	37,2	3	12,4		
Spol × starost (1 × 2)	276,1	4	69,0	$F_{12} = 3{,}08$	$F_{0,05}(4,19) = 2{,}90$
Spol × lik (1 × 3)	18,1	3	6,0		
Starost × lik (2 × 3)	507,7	12	42,3	$F_{23} = 1{,}89$	$F_{0,05}(1219) = 2{,}31$
Pogreška *e*	367,9	12	30,7		
Pogreška *e'*	424,2	19	22,4	$Fe' = 1$	
Skupaj	5661,5	39			

V novo pogreško *e'* smo vključili komponente (1), (3), (1 × 3).

Razlike v zaznavanju likov po starosti so visoko značilne, razlike v interakciji $I_{spol \times starost}$ pa so značilne s 5 % rizikom; to kaže na to, da so spremembe v zaznavanju likov po starosti značilno drugačne za dečke kot za deklice.

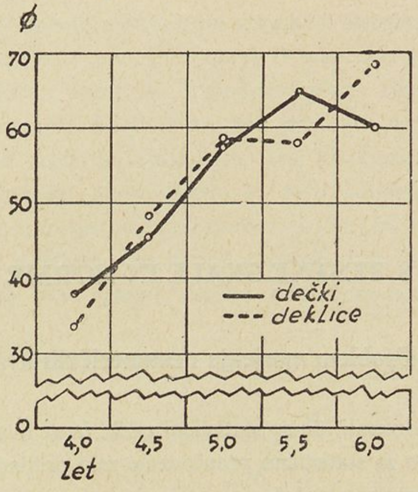
Iz zgornje analize variance zaključimo, da ima iz podatkov o zaznavanju barv smisel dalje proučevati le odvisnost zmožnosti zaznavanja barv od starosti, vendar ločeno za dečke in deklice.

Sliko sprememb v zaznavanju barv po starosti in spolu pokažejo ustrezna povprečja. Ta povprečja izračunamo iz izrazov X_{12} v tabeli reduciranih osnovnih podatkov in njihovih vsot (tabela 59b) po obrazcu

$$\bar{x}_{12} = x_0 + X_{12}/t = 50 + X_{12}/4 \qquad (184)$$

Tabela 61. Povprečno število pravilno zaznanih likov po starosti in spolu otrok

Starost let	Dečki	Deklice
4,0	38,00	33,50
4,5	45,25	48,50
5,0	57,50	58,25
5,5	64,75	58,00
6,0	60,00	68,25



Slika 30. Povprečno število pravilno zaznanih likov po starosti in spolu otrok

Standardno pogreško gornjih povprečij izračunamo po obrazcu

$$SE_{\bar{x}_{12}} = \sqrt{s_e^2} / \sqrt{t} = \sqrt{22,4} / \sqrt{4} = 2,37 \tag{185}$$

standardno pogreško razlik povprečij pa po obrazcu

$$SE_{\Delta\bar{x}_{12}} = \sqrt{2 s_e^2} / \sqrt{t} = \sqrt{2 \cdot 22,4} / \sqrt{4} = 3,35 \tag{186}$$

Ker je razlika dveh povprečij značilna s 5% rizikom, če je večja kot verjetni odklon

$$t_{0,05}(m = 19) \cdot s_{\Delta\bar{x}_{12}} = 2,09 \cdot 3,35 = 7,0 \tag{187}$$

sklepamo iz tabele 61, da so značilna vsa povečanja zmožnosti v zaznavanju barv po starosti z izjemo pri dečkih od starosti pet let in pol do šest let, pri deklicah pa od starosti pet let do pet let in pol. Pokazalo se je tudi, da je zmožnost v zaznavanju likov šestletnih deklic značilno večja kot zmožnost šestletnih dečkov. To je ravno vzrok, da je nastala interakcija med spolom in starostjo značilna.

8 TESTNE SKALE IN NORME

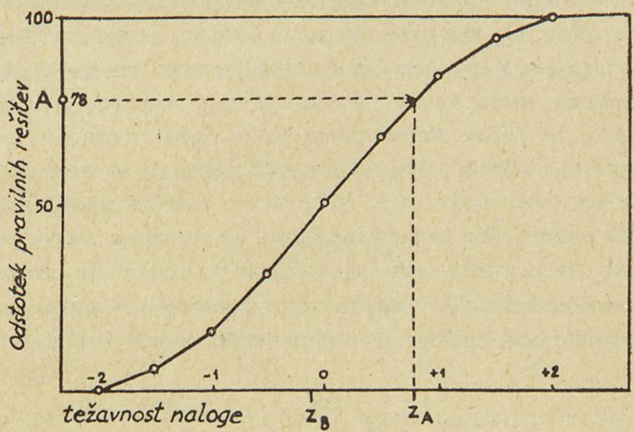
81. Problem merjenja nenumeričnih kvalitet

Že v uvodu smo omenili, da so statistični znaki izraz kvalitet posameznih enot. Nekateri izmed njih so za statistično proučevanje zelo prikladni, ker so dani numerično. To omogoča precizno določanje, primerjavo in podrobno analizo. Velikost človeka je karakterizirana v cm višine, ki jo moremo točno določiti, ugotoviti razlike v višini dveh oseb itd. Še bolj drastičen primer numeričnega znaka je starost, ki jo moremo na oko oceniti le na grobo, da se pa objektivno določiti poljubno natančno. Tudi med atributivnimi znaki je veliko takih, katerih vrednost moremo objektivno določiti. Taki znaki so na primer: spol, stan itd.

V psiholoških raziskavah pa imamo polno kvalitet, ki niso take absolutne narave in katerih vrednosti niso vnaprej dane numerično. Različne zmožnosti, inteligenca, ubogljivost, agresivnost itd. so kvalitete, za katere za sedaj nimamo numeričnega izraza, če pa imamo atributiven izraz, je ta zelo samovoljen. Enako je z literarno vrednostjo novele, kvaliteto šale ali težavnostjo naloge. Skupna lastnost vseh teh kvalitet pa je možnost primerjave in s tem v zvezi možnost rangiranja, kar sta bistveni lastnosti numeričnih znakov. Zaradi teh lastnosti moremo pod določenimi predpostavkami tem znakom dati numeričen opis.

Osnovna predpostavka, ki jo napravimo, da bi dali tem kvalitetam numeričen izraz, je, da se karakteristike, kot so različne zmožnosti, inteligenca, ubogljivost in tako dalje, numeričnega značaja, ki se za populacijo distribuirajo v normalni distribuciji. Ta predpostavka je sprejemljiva, ker je normalna distribucija naravna porazdelitev najrazličnejših kvalitet. Večina ljudi je na primer srednje nadarjenih, odkloni na slabše oziroma na boljše pa so tem redkejši, čim večji so.

Do možnosti merjenja teh kvalitet pa pridemo pod to predpostavko z naslednjim sklepanjem. Za veliko homogeno populacijo oseb predpostavljajmo, da se zmožnosti računskega presojanja distribuirajo normalno. Kljub temu da za sedaj še nimamo numeričnega merila te zmožnosti, moremo teoretično uvesti z-skalo zmožnosti računskega presojanja. V skladu z lastnostmi normalne distribucije vemo, kaj posamezne vrednosti z pomenijo. Vrednosti z okrog 0 pomenijo povprečno zmožnost, pozitivni z nadpovprečno, negativni z podpovprečno zmožnost, s tablicami normalne distribucije moremo dobiti zvezo z s centilnim rangom in tako dalje. Vendar je za sedaj ta skala še abstraktna. Do konkretizacije moremo priti na naslednji način. Vzemimo dano nalogo, ki meri računske zmožnosti, in jo dajmo v reševanje veliki homogeni skupini oseb. Določeni odstotek oseb bo nalogo rešil pravilno. Čim težja je naloga, tem manjši je ta odstotek, in čim lažja je naloga, tem večji je odstotek oseb, ki so nalogo pravilno rešile. Težavnost naloge in odstotek



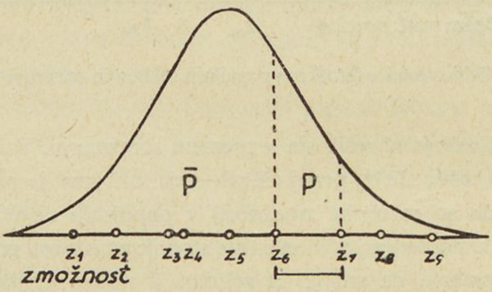
Slika 31. Odnos med odstotkom pravilnih rešitev in težavnostjo naloge

oseb populacije, ki naloge ni rešil, sta v premem sorazmerju. Vzemimo, da je dano nalogo A pravilno rešilo 22 % preizkušanih oseb oziroma je ni rešilo 78 %. Ker predpostavljamo, da so računske zmožnosti v populaciji distribuirane normalno, moremo poiskati standardiziran odklon z tiste stopnje zmožnosti presojanja računskih odnosov, ki je potrebna, da nalogo A rešimo. V našem konkretnem primeru je z_A $(F = 0{,}5 - P = 0{,}5 - 0{,}22 = 0{,}28) = +0{,}77$. S tem z moremo meriti težavnost naloge A, ki je merjena s standardiziranim odklonom z_A tiste zmožnosti, ki je še potrebna, da nalogo A rešimo. Enako pa moremo s tem z meriti zmožnost presojanja računskih odnosov posameznika. Če testirana oseba naloge A ne reši, računamo, da so njene zmožnosti računanja pod $+0{,}77$, v nasprotnem primeru pa nad $+0{,}77$, če zmožnost merimo v standardiziranih odklonih z. Razen naloge A vključimo v test še nalogo B, za katero na enak način ugotovimo težavnost naloge z_B. Vzemimo, da je standardiziran odklon zmožnosti, ki je še potrebna, da nalogo B

rešimo, $z_B = -0{,}12$. Vsako osebo, testirano z obema nalogama, moremo kategorizirati po zmožnosti presojanja računskih odnosov v eno izmed treh kategorij. Zmožnost oseb, ki niso rešile nobene izmed obeh nalog, je, merjena v z-enotah, pod $z_B = -0{,}12$. Zmožnost oseb, ki so rešile samo lažjo (B) nalogo, je, merjena v z-enotah, med $z_B = -0{,}12$ in $z_A = +0{,}77$. Zmožnost oseb, ki so rešile obe nalogi, pa je nad $z_A = +0{,}77$.

S tem je nakazana splošna rešitev merjenja zmožnosti. Z dvema nalogama, ki smo ju dali v reševanje testirani osebi, smo mogli testirano osebo kategorizirati v enega izmed treh razredov zmožnosti. Če namesto dveh nalog vzamemo v test večje število po težavnosti različnih nalog, moremo zmožnost testirane osebe določiti veliko bolj natančno, ker je z njimi interval, v katerem variira zmožnost, razdeljen v večje število razredov. V splošnem k nalog razdeli interval zmožnosti v $k + 1$ razred.

Vsaka testirana oseba, katere zmožnost je na primer med z_6 in z_7, bo rešila prvih šest nalog, za rešitev sedme naloge pa je njena zmožnost premajhna. Če štejemo šest pravilno rešenih nalog kot šest točk, vemo, da so zmožnosti vseh oseb, ki so dosegle šest točk, med z_6 in z_7. Večje število pravilno rešenih nalog oziroma doseženih točk pomeni višjo stopnjo zmožnosti. Če so naloge urejene po težavnosti in izbrane tako, da so v težavnosti med nalogami po vrsti enake razlike, je skupno število s testom doseženih točk v linearni zvezi z zmožnostjo. V tem primeru je število s testom doseženih točk direktno in pravilno merilo stopnje zmožnosti.



Slika 32. Skala zmožnosti

Na način, ki je bil nakazan zgoraj, moremo reševati dva problema:

a) Težavnost naloge določamo tako, da damo preizkusno nalogo v reševanje veliki homogeni skupini oseb. Z odstotkom oseb, ki so nalogo pravilno rešile, pa določimo težavnost naloge, merjeno v z-enotah.

b) Zmožnost testirane osebe merimo s številom doseženih točk, ki jih je dosegla pri testu z velikim številom testnih nalog.

Popolnoma analogen problem nastopa tudi pri drugih kvalitetah, ki imajo numerično osnovo. Vzemimo kot primer kritičnost pri presojanju vrednosti literarnega dela. Tudi kritičnost presojanja je znak z numeričnim karakterjem, ker govorimo o večji ali manjši kritičnosti posameznih ocenjevalcev. Če predpostavljamo, da se kritičnost presojanja ocenjevalcev distribuira normalno, moremo, enako kot za zmožnosti, reševati dva problema. Z odstotkom ocenjevalcev, ki so ocenili ustreznost nekega literarnega dela, moremo z ustrezajočo vrednostjo z meriti kvaliteto dela. Število ugodno ocenjenih del, ki so bila razvrščena po kvaliteti, ki jih je ocenjevalec ocenil kot ustrezna, pa more meriti rigoroznost presojanja tega ocenjevalca.

Zavedati se moramo, da je zgornji postopek idealiziran in da so abstrahirani vsi dodatni faktorji, tako da je rešitev določene naloge odvisna samo od zmožnosti, ne pa od dodatnih faktorjev. V odstavku 82.3 bo govora o posledicah teh dodatnih vplivov na testne rezultate.

82. Testne norme

82.1 Sestavljanje

Tablice, s katerimi iz števila točk, doseženih pri določenem testu, razberemo ustrezno mero zmožnosti, imenujemo testne norme. Testne norme sestavljamo po naslednjih stopnjah:

82.11 Testne naloge. Osnovni problem sestavljanja normnih tablic je skupina nalog, ki sestavlja test, ki je orodje preizkušanja kvalitete, ki jo hočemo meriti. Da skupina nalog ustreza svojemu namenu, morajo biti naloge po možnosti take, da so razlike v težavnosti nalog (merjene v z) čimbolj enake in da zavzemajo ves interval zmožnosti. Zaradi tega je treba skupino nalog pred uvedbo analizirati in prečistiti v tem smislu, da izločamo naloge iste stopnje težavnosti in dodajamo naloge drugih težavnostnih stopenj. To delamo toliko časa, da dobimo čimbolj enakomeren register nalog po težavnosti na vsem intervalu zmožnosti. Kakšne posledice ima na testno distribucijo skupina nalog, ki temu pogoju ne ustreza, vidimo iz slike 33.

Pri določanju stopnje težavnosti posameznih nalog nastane razen drugih tudi naslednji problem. Dostikrat je testna naloga dana v tej obliki, da testiranec izmed več možnih vpisanih odgovorov izbere pravilni odgovor na dano nalogo oziroma vprašanje. Pri tem sistemu pa se more zgoditi, da tudi oseba, ki brez poznavanja — na slepo — odgovarja na vprašanja, v določenem številu primerov pravilno reši dano nalogo. V primeru, da sta na dano nalogo postavljena dva odgovora: en pravilen in en nepravilen, moremo pričakovati, da pri popolnoma nepreudarnem odgovarjanju dobimo 50 % pravilnih in 50 % napačnih odgovorov. Ta efekt moti pravilno določanje težavnosti nalog, ker odstotek pravilnih odgovorov ne ustreza stvarni težavnosti naloge. Efekt ugibanja je odvisen od števila možnih odgovorov in je tem manjši, čim večje je število možnih odgovorov. Odstotek pravilno rešenih nalog, ki meri kot centilni rang težavnost naloge, korigiramo po obrazcu

$$p_{cor} = \frac{jp - 100}{j - 1} \tag{188}$$

Pri tem pomeni: p = nekorigiran odstotek pravilnih odgovorov, j = število možnih odgovorov na dano vprašanje oziroma nalogo, p_{cor} = korigirani odstotek pravilnih odgovorov.

Primer 130. Preizkušamo težavnost treh nalog. Nalogo A, ki ima dva možna odgovora, je rešilo pravilno $p_A = 68\,\%$ preizkušanih oseb, nalogo B, pri kateri so trije možni odgovori, je rešilo $p_B = 45\,\%$, nalogo C, pri kateri je možno 5 odgovorov, pa $p_C = 22\,\%$ oseb. Kolika je težavnost teh treh nalog, če upoštevamo korekturo zaradi ugibanja?

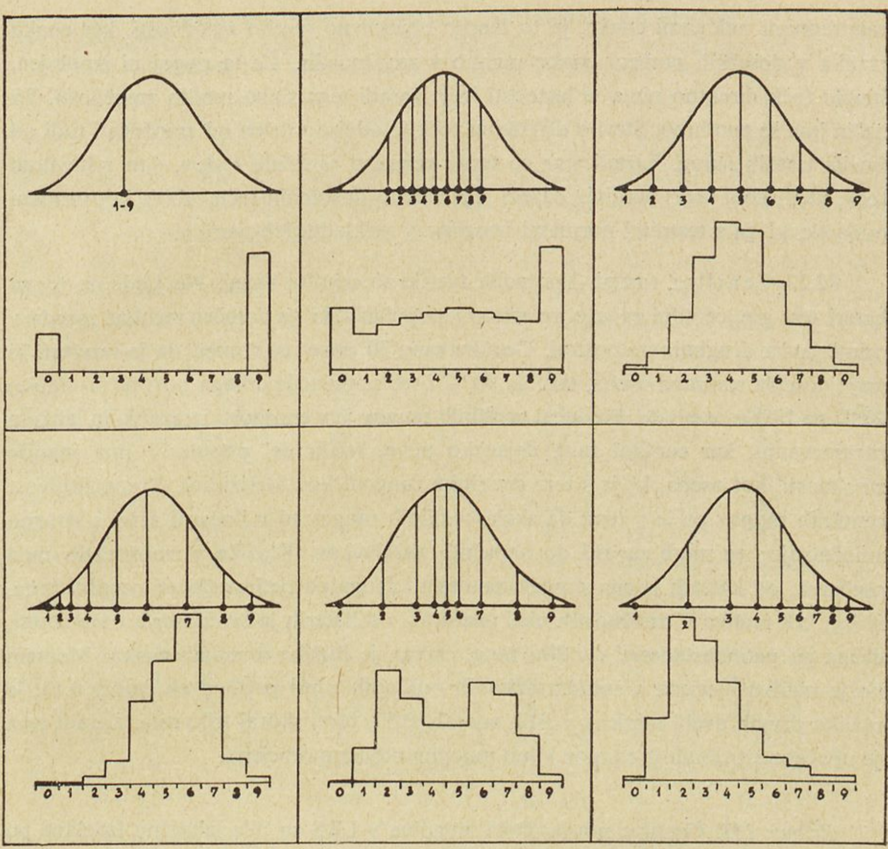
Tabela 62. Določanje težavnosti nalog z upoštevanjem korekture zaradi ugibanja

Naloga	p	j	p_{cor}	Težavnost z
A	68 %	2	36 %	+ 0,36
B	45 %	3	17,5 %	+ 0,93
C	22 %	5	2,5 %	+ 1,96

p_{cor} smo izračunali po obrazcu 184, ustrezne vrednosti težavnosti z pa iz normalne distribucije (tabela B) z ($F = 0{,}5 - p_{cor}$).

Glede na značaj odgovorov točkujemo nepravilne rešitve z 0 ali —1, pravilne rešitve pa s + 1.

82.12 Testni vzorec. Ko imamo sestavljeno skupino nalog, ki zadošča zgornjim pogojem, in so te razvrščene po stopnji težavnosti od najlažje do najtežje, s to skupino nalog testiramo populacijo, za katero izdelujemo testne norme. Distribucija doseženih rezultatov predstavlja distribucijo populacije glede na merjeno zmožnost. Tehnično redkokdaj sestavljamo distribucijo po zmožnostih za populacijo v celoti, temveč iz populacije izberemo slučajen vzorec oseb. Distribucija točk, ki so jih dosegle testirane osebe vzorca, predstavlja oceno distribucije populacije. Vzorec mora biti tako velik in tako izbran, da zadovoljuje zahteve o zanesljivosti podatkov. Če vzorec ni pristran, pričakujemo, da distribucija rezultatov testiranja ne bo značilno različna od normalne.



Slika 33. Distribucije testnih rezultatov v odvisnosti od razporeditve nalog po težavnosti

Distribucija doseženih točk pa ni odvisna samo od reprezentativnosti vzorca, ampak bistveno tudi od razmestitve nalog po težavnosti. V sliki 33 imamo nekaj karakterističnih primerov, ki pokažejo nenormalnosti distribucij doseženih točk zaradi nepravilne težavnosti testnih nalog. Te deformacije nastanejo zaradi nelinearne odvisnosti med številom točk testnih rezultatov in *z*-rezultatov. Enako more nastopiti deformacija distribucije testnih rezultatov tudi v primeru nepravilnega časa testiranja.

82.2 **Izražanje testnih rezultatov**

82.21 Število doseženih točk. Rezultate testiranja moremo izražati različno. Eden od njih je kar število doseženih točk pri testiranju, ki je običajno vsota točk, doseženih pri posameznih nalogah testa. Če so razlike v težavnosti med zaporednimi nalogami enake, je to merilo objektivno merilo zmožnosti, ker enaka razlika v dosežkih pomeni enako razliko v zmožnostih. Če ta pogoj ni izpolnjen, število točk direktno nima te lastnosti in je zaradi tega slabo merilo zmožnosti. Ta način ima še eno hibo. Število doseženih točk je odvisno razen od zmožnosti tudi od števila testnih nalog. Zaradi tega so testni rezultati različnih testov, dani s številom točk, med seboj neprimerljivi. Zaradi tega število doseženih točk rabi le kot osnovni podatek, ki ga s testnimi normami izrazimo v prikladnejših merilih.

82.22 Centilni rangi. Enotnejše merilo so centilni rangi. Ne glede na to, za kateri test gre, centilni rang pove mesto v populaciji, ki ga določen rezultat zaseda v primerjavi z drugimi vrednostmi. Centilni rang 90 pove na primer, da je rezultat, ki ga je dosegla testirana oseba, tak, da 90 % oseb populacije dosega povprečno slabše, 10 % pa boljše rezultate. Prednost centilnih rangov je v enotnosti izražanja in lahkem razumevanju, ker centilni rang dejansko pove, koliki del populacije ima manjše zmožnosti kot oseba, ki je s tem centilnim rangom karakterizirana. Pomanjkljivost centilnih rangov pa je v tem, da skala centilnih rangov ni v linearni zvezi s stvarno zmožnostjo; to more zavesti do napačnih zaključkov. Razlika v zmožnostih med osebama, od katerih je ena dosegla petdeseti, druga pa petinpetdeseti centilni rang, ni ista kot razlika v zmožnostih med osebama, od katerih je ena dosegla devetdeseti, druga pa petindevetdeseti centilni rang, čeprav je razlika v rangih enaka. Medtem ko je razlika merjena v standardiziranih odklonih z pri prvih dveh enaka 0,13, je razlika drugih dveh, merjena v istih enotah, 0,37, torej skoraj trikratna. Zaradi tega je uporabnost centilnih rangov kljub mnogim odlikam omejena.

Primer 131. Centilne norme DAT mladine v LRS so bile tehnično izdelane po naslednjem postopku:

a) Iz podatkov vzorčnega testiranja so bile za vsak test posebej sestavljene frekvenčne distribucije dosežkov vzorca.

b) Izračunana je bila kumulativna frekvenčna distribucija relativnih frekvenc.

c) Kumulativa relativnih frekvenc je bila včrtana na verjetnostni papir.

d) Ta krivulja (v bistvu je bila to premica) je bila grafično izravnana.

e) Iz izravnane linije so bili odčitani centilni rangi in sestavljena tabela centilnih norm.

f) Izdelane so bile centilne normne tablice za tretješolce in četrtošolce, ločeno za dečke in deklice.

Primer 132. V tabeli 63 so dane centilne normne tablice DAT za četrtošolce v LR Sloveniji iz leta 1957. Centilne norme dajejo direkten prehod iz števila doseženih točk na centilne range, in sicer v razmaku po pet, za naslednje teste: Testi zmožnosti presojanja mehanskih, abstraktnih, računskih, besednih odnosov, urnosti in natančnosti, spacialnih in ploskovnih odnosov.

Tabela 63. Centilne norme DAT četrtošolcev v LR Sloveniji

M = mehanski test; *A* = abstraktni test; *R* = računski test; *B* = besedni test; *UN* = urnost in natančnost; *S* = spacialni test; *P* = ploskovni test; *CR* = centilni rang

CR	*M*	*A*	*R*	*B*	*UN*	*S*	*P*	*CR*
99	59+	42+	34+	41+	74+	82+	58+	99
97	56—58	40—41	32—33	39—40	70—73	78—81	56—57	97
95	54—55	38—39	30—31	37—38	66—69	73—77	55	95
90	51—53	36—37	27—29	35—36	63—65	68—72	53—54	90
85	49—50	35	25—26	32—34	61—62	64—67	51—52	85
80	47—48	33—34	24	30—31	59—60	61—63	50	80
75	46	32	23	29	57—58	59—60	48—49	75
70	44—45	30—31	22	28	56	56—58	47	70
65	43	29	21	27	55	54—55	46	65
60	41—42	28	20	25—26	54	52—53	45	60
55	40	26—27	19	24	53	50—51	44	55
50	39	24—25	18	23	52	47—49	43	50
45	38	23	17	22	50—51	45—46	42	45
40	36—37	20—22	16	21	49	43—44	41	40
35	35	18—19	15	20	48	40—42	39—40	35
30	33—34	15—17	14	19	47	38—39	38	30
25	31—32	13—14	13	17—18	45—46	34—37	36—37	25
20	29—30	10—12	12	16	44	30—33	34—35	20
15	26—28	6—9	10—11	15	42—43	24—29	32—33	15
10	22—25	3—5	8—9	13—14	39—41	18—23	28—31	10
5	19—21	0—2	7	10—12	36—38	13—17	25—27	5
3	16—18	—	5—6	8—9	32—35	7—12	22—24	3
1	0—15	—	0—4	0—7	0—31	0—6	0—21	1
M	38,4	22,6	18,2	25,6	51,7	47,0	42,1	*M*
SD	10,9	12,2	7,3	8,3	9,9	17,1	9,1	*SD*

Testne norme moremo uporabljati za direktno odčitanje centilnih rangov iz števila doseženih točk pri posameznem testu.

Primer 133. Četrtošolci A, B in C VIII. gimnazije v Ljubljani so dosegli pri testiranju z DAT navedene v tabeli 64.

Centilni rangi so bili odčitani iz centilnih norm v tabeli 63. Primerjavo centilnih rangov moremo izvesti tudi med testi, kar z absolutnimi vrednostmi dosežkov ni bilo mogoče. Iz tabele 64 vidimo, da je dijak A najslabši v zmožnosti presojanja besednih, najboljši pa v zmožnosti presojanja mehanskih odnosov, dijak B najslabši v urnosti in natančnosti, najboljši pa v zmožnosti presojanja mehanskih odnosov. Dijak C pa je najslabši v zmožnosti presojanja besednih, najboljši pa v presojanju mehanskih odnosov. Splošen nivo zmožnosti je najvišji pri učencu A, najnižji pa pri učencu C.

Tabela 64. Rezultati testiranja dijakov DAT za dijake A, B, C VIII. gimnazije v Ljubljani

x = točke; CR = centilni rang

Test	A		B		C	
	x_A	CR_A	x_B	CR_B	x_C	CR_C
Mehanski	56	97	52	90	42	60
Abstraktni	33	80	33	80	22	40
Računski	21	65	17	45	18	50
Besedni	19	30	17	25	15	15
Urnost, natančnost.	60	80	44	20	48	35
Spacialni	69	90	43	40	37	25
Prostorni	45	60	53	90	40	35

82.23 Standardizirani odklon — z-rezultati. Če je test konstruiran tako, da je distribucija testnih rezultatov vzorčne skupine normalna, je najboljše sredstvo za merjenje zmožnosti standardizirani odklon testnega rezultata z. z je v tem primeru direktno linearna skala zmožnosti. Zaradi razmeroma enostavne zveze standardiziranega odklona z normalno distribucijo $N(M = 0;\ SD = 1)$, z nazorno podaja zmožnost. Negativni z pomeni podpovprečno zmožnost, pozitivni z pa nadpovprečno zmožnost. S tabelami normalne distribucije pa imamo direktno zvezo z-rezultatov s centilnimi rangi. Problem uporabnosti in pomena nastopi edinole, če distribucija testnih rezultatov ni normalna. V tem primeru z izgubljajo na nazornosti. Vendar so z-rezultati, če odstopanja od normalnosti niso velika, še vedno zelo uporabno sredstvo za prikazovanje testnih rezultatov. Primerjava testnih rezultatov za različne teste je v primeru abnormalnosti distribucij omejena le na teste, katerih distribucije so med seboj, če že ne enake, vsaj podobne po obliki. Tehnična hiba z-rezultatov pa je v tem, da imajo predznak in decimalke.

Pretvarjanje osnovnih testnih rezultatov v z-rezultate izvedemo po obrazcu

$$\frac{x - M}{SD} = z \tag{189}$$

Primer 134. V tabeli 63 imamo v testnih normah dane aritmetične sredine in standardne odklone posameznih testov za četrtošolce. Predpostavljamo normalnost testnih distribucij. Pretvorimo testne rezultate dijakov A, B, C iz primera 132 v tabeli 64 v z-rezultate!

z-rezultati so izračunani po obrazcu 189. Na primer:

$$z_{A,meh} = (56 - 38{,}4)/10{,}9 = +1{,}61$$

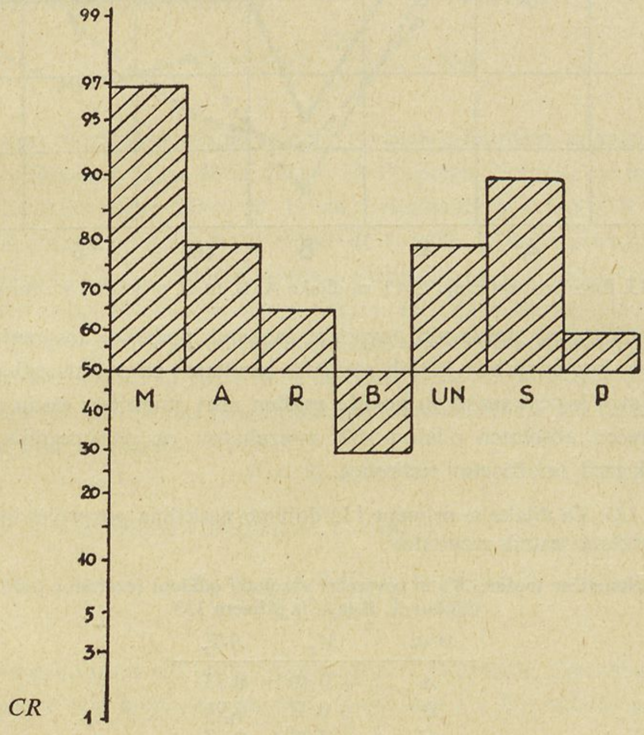
Iz rezultatov moremo neposredno določiti, v katerih zmožnostih so dijaki A, B in C pod ali nad slovenskim povprečjem in kolik je odklon od povprečja.

Tabela 65. Rezultati testiranja z DAT za četrtošolce A, B in C VIII. gimnazije v Ljubljani

Test	M	SD	x_A	x_B	x_C	z_A	z_B	z_C
Mehanski	38,4	10,9	56	52	42	+ 1,61	+ 1,25	+ 0,35
Abstraktni	22,6	12,2	33	33	22	+ 0,85	+ 1,51	—0,05
Računski	18,2	7,3	21	17	18	+ 0,38	—0,16	—0,03
Besedni	25,6	8,3	19	17	15	—0,80	—1,04	—1,28
Urnost, natančnost	51,7	9,9	60	14	48	+ 0,84	—0,78	—0,37
Spacialni	47,0	17,1	69	43	37	+ 1,29	—0,23	—0,58
Ploskovni	42,1	9,1	45	53	40	+ 0,33	+ 1,20	—0,23

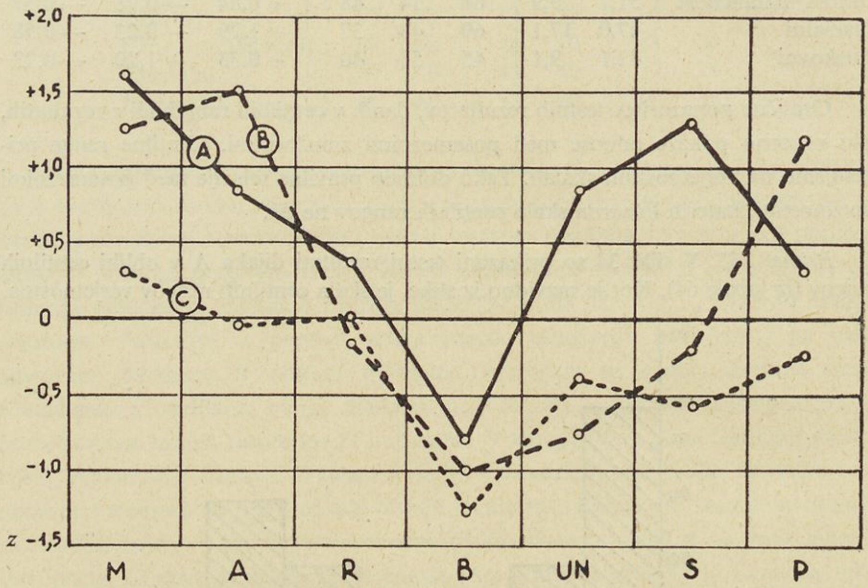
Grafična ponazoritev testnih rezultatov, danih v centilnih rangih ali *z*-rezultatih, zelo nazorno pokaže odnose med posameznimi zmožnostmi. Centilne range prikazujemo na verjetnostnih skalah. Tako dobimo pravilne relacije med posameznimi zmožnostmi, katerih linearna skala centilnih rangov ne dá.

Primer 135. V sliki 34 so prikazani testni rezultati dijaka A v obliki centilnih rangov (iz tabele 64). Kot je razvidno iz slike, je skala centilnih rangov verjetnostna,



Slika 34. Rezultati testiranja DAT za dijaka A, prikazani v centilnih rangih

ker bi v nasprotnem primeru ne dobili pravilnih odnosov med dejanskimi zmožnostmi. Slika 35 pa prikazuje psevdokrivulje z-rezultatov dijakov A, B in C iz tabele 65. Slika nazorno prikaže odnose med zmožnostmi za vse tri dijake hkrati. Iz nje vidimo, da je dosežek vseh treh dijakov v besednem testu podpovprečen, v drugih testih pa so razlike med dijaki znatne, razen v računanju, pri katerem so zmožnosti vseh treh okrog povprečja. Primerjava slike 34 s psevdokrivuljo za dijaka A pokaže, da se obe sliki skladata; to je posledica tega, da so centilni rangi na sl. 34 dani v verjetnostni skali.



Slika 35. Rezultati testiranja DAT za dijake A, B, in C, prikazani v z-rezultatih

Medtem ko nima smisla niti povprečje osnovnih podatkov testiranja, niti centilnih rangov, ima povprečje testnih različnih rezultatov za posameznika, izraženih v z-enotah, svoj logični smisel in pokaže splošen nivo zmožnosti testiranca. Enako more povprečen absoluten odklon AD_z z-rezultatov za posameznika rabiti kot merilo razlik med zmožnostmi testiranca.

Primer 135. Za dijake iz primera 133 dobimo naslednja povprečja in povprečne absolutne odklone testnih rezultatov.

Tabela 66. Aritmetične sredine M_z in povprečni absolutni odkloni rezultatov testiranja z DAT dijakov A, B in C iz primera 133

Dijak	M_z	AD_z
A	+ 0,40	0,73
B	+ 0,23	0,91
C	—0,32	0,37

$$M_{z_A} = 1/7\,(1{,}61 + 0{,}85 + \ldots + 0{,}33) = +0{,}40$$

$$z_A = 1/7\,(|1{,}61 - 0{,}40| + |0{,}85 - 0{,}40| + \ldots + |0{,}33 - 0{,}40|) = 0{,}73$$

Iz rezultatov v tabeli 66 sklepamo, da je splošen nivo zmožnosti najvišji pri dijaku A ($M = +0{,}40$), najnižji pa pri dijaku C ($M = 0{,}32$), da pa so razlike med zmožnostmi najmanjše pri dijaku C ($AD_{z_C} = 0{,}37$).

82.24 Prevedba z-rezultatov na skale s poljubnim M in SD. F-rezultati. Ena izmed hib standardiziranih z-rezultatov so predznaki in decimalke. Tu si lahko pomagamo z linearno transformacijo z-rezultatov v primernejše količine. Linearna transformacija z-rezultatov ne vpliva na vsebino skale, čeprav je merjena z drugim merilom. Splošen obrazec linearne transformacije rezultatov x_s, za katere sta aritmetična sredina M_s, standarden odklon pa SD_s, v nove rezultate x_t, ki imajo aritmetično sredino M_t in standardni odklon SD_t, je obrazec

$$\frac{X_t - M_t}{SD_t} = \frac{X_s - M_s}{SD_s} \qquad (190)$$

ki je v razviti obliki dan v obrazcu

$$X_t = M_t + \frac{SD_t}{SD_s}(X_s - M_s) \qquad (191)$$

Dostikrat preračunavamo po zgornjih obrazcih z-rezultate, za katere je $M_s = 0$, $SD_s = 1$, v F-skale z $M_t = 50$ in $SD_t = 10$. Povprečni F-rezultat je torej $M = 50$, standardni odklon pa je $SD = 10$. Enota F-rezultatov je 0,1 SD. S celimi števili od 1 do 100 obsežemo torej interval $-5\,SD$ do $+5\,SD$. Ta način izražanja je tehnično veliko prikladnejši kot z-rezultati, zveza z z-rezultati pa je očitna. $F = 75$ pomeni, da je rezultat za $2{,}5\,SD$ oddaljen od povprečja in tako dalje. Skoraj celotna populacija je v mejah $25 < F < 75$. Zaradi tega so običajno testne norme, izražene v F-rezultatih, izdelane na intervalu od 25 do 75 in ne na celem intervalu od 1 do 100, kot je teoretično možno. Če uporabimo splošen obrazec transformiranja 191 za naš konkretni primer, dobimo v obrazcu

$$F = 50 + 10 \cdot z \qquad (192)$$

transformacijo z-rezultatov v F rezultate, v obrazcu

$$F = 50 + \frac{10}{SD_x}(x - M_x) \qquad (193)$$

pa transformacijo osnovnih testnih x-rezultatov v T-rezultate. Prevedba z-rezultatov v F-rezultate je zelo preprosta, prevedba x-rezultatov v F-rezultate pa je malo zamudnejša.

Primer 137. Z-rezultate testiranja z DAT za tri četrtošolce iz primera 133 je treba prevesti v F-rezultate.

Tabela 67. z- in F-rezultati testiranja z DAT za četrtošolce A, B in C iz primera 133

Test	z_A	z_B	z_C	F_A	F_B	F_C
Mehanski	+ 1,61	+ 1,25	+ 0,33	66	62	53
Abstraktni	+ 0,85	+ 1,51	—0,05	59	65	50
Računski	+ 0,38	—0,16	—0,03	54	48	50
Besedni	—0,80	—1,04	—1,28	42	40	37
Urnost, natančnost	+ 0,84	—0,78	—0,37	42	42	46
Spacialni	+ 1,29	—0,23	—0,58	63	48	44
Ploskovni	+ 0,33	+ 1,20	—0,23	53	62	48

F-rezultate smo iz z-rezultatov dobili preprosto tako, da smo z-rezultat pomnožili z 10, produktu pa prišteli 50. Primer jasno pokaže preprostejše izražanje s F-rezultati.

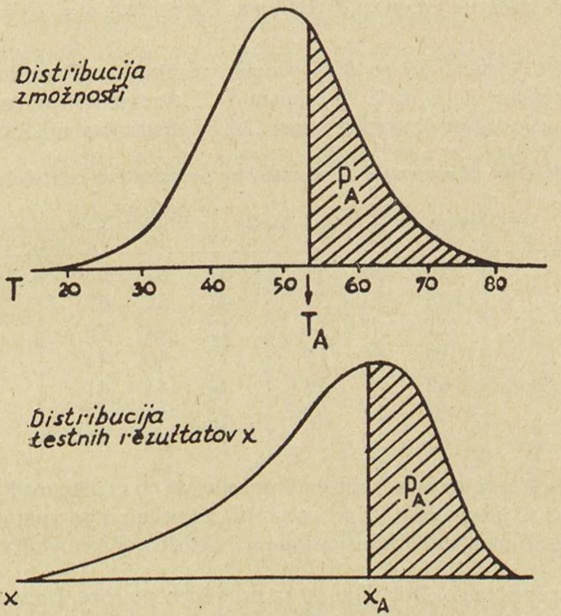
82.25 T-rezultati. F-rezultate smo iz z-rezultatov dobili z linearno transformacijo. Zaradi tega imajo F-rezultati vse dobre in slabe lastnosti z-rezultatov. z- in F-rezultati so upravičeni le, če je distribucija testnih rezultatov, ki rabi za osnovo izdelave normnih tablic, normalna. V primeru, da je ta distribucija od normalne različna, pa je njih vrednost omejena in problematična. Praktično je težko sestaviti serijo nalog, katerih težavnost bi se enakomerno večala. Kakšen vpliv ima to na distribucijo testnih rezultatov, vidimo iz slike 33. Zaradi tega je problem primernega merila testnih rezultatov večkrat pereč.

Pomanjkljivosti, ki jih imajo z- in F-rezultati, odpravimo z uvedbo T-rezultatov, ki so idealno sredstvo za merjenje zmožnosti na osnovi testnih rezultatov.

Tudi če distribucija testnih rezultatov x zaradi neenakomernosti naraščanja težavnosti testnih nalog ni normalna, moremo iz nje dobiti, kolik odstotek (P) testirancev je preseglo dano število točk x. Ker predpostavka o normalni porazdelitvi zmožnosti še vedno velja, moremo iz dobljenega P najti mejno zmožnost, ki je potrebna, da dosežemo to število točk. Ta je merjena z vrednostjo z, ki ustreza odstotku P na normalni distribuciji zmožnosti. Ta rezultat, transformiran v skalo z $M = 50$ in $SD = 10$, je T-rezultat. Proces je naznačen v sliki 36, kjer je distribucija testnih rezultatov, dobljena iz vzorca, izrazito asimetrična v levo.

T-rezultati zato niso popačeni zaradi morebitne nenormalnosti vzorčnih testnih distribucij, kolikor gre nenormalnost na račun sestava nalog po težavnosti, ne pa na račun pristranosti vzorca.

F- in T-rezultati za isti test se skladajo v primeru, da je distribucija osnovnih testnih rezultatov x normalna. Čim večja pa je nenormalnost distribucije testnih rezultatov x, tem večje je neskladje med njima.



Slika 36. Transformacija x-rezultatov v T-rezultat

Testne norme, izražene v T-rezultatih, dajo direktno zvezo med številom doseženih točk in ustrezajočim T-rezultatom. Z njimi moremo osnovne rezultate testiranja prevesti direktno v T-rezultate.

Primer 138. Kot primer testnih norm v T-rezultatih dajemo iz testnih norm DAT za testne norme zmožnosti presojanja mehanskih odnosov četrtošolcev.

Tabela 68. Testne norme zmožnosti presojanja mehanskih odnosov četrtošolcev v LRS
(T-rezultati)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0					25	25	26	26	26	27
10	27	27	28	28	29	29	30	31	32	33
20	34	35	36	37	38	38	39	40	40	41
30	42	43	43	44	45	46	47	48	49	50
40	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
50	61	62	63	64	65	67	68	69	70	71
60	72	74	75							

T-rezultati v tabeli 68 gredo od 25 do 75, ker zajamemo s tem praktično vse primere (natančno 98,8 %). V tablici 69 so v prvi koloni desetice, v prvi vrsti pa enice števila točk, doseženih pri testu. Kjer se ustrezajoča kolona desetic in vrsta enic sekata, dobimo ustrezno vrednost T-rezultata. Na primer: $x = 48 = 40 + 8$ točkam ustreza $T = 59$.

Primer 139. V tabeli 69 so dani osnovni rezultati x, F-rezultati in T-rezultati DAT za četrtošolce A, B in C iz primera 132. F-rezultati so vzeti iz tabele 67, T-rezultati pa so odčitani iz testnih norm DAT četrtošolcev v LR Sloveniji.

Tabela 69. Osnovni x-rezultati, F-rezultati in T-rezultati za četrtošolce A, B in C

Test	Dijak A			Dijak B			Dijak C		
	x_A	F_A	T_A	x_B	F_B	T_B	x_C	F_C	T_C
Mehanski	56	66	68	52	62	63	42	53	53
Abstraktni	33	59	58	41	65	69	22	50	48
Računski	21	54	54	17	48	48	18	50	50
Besedni	19	42	45	17	40	43	15	37	40
Urnost, natančnost	60	58	59	44	42	41	48	46	46
Spacialni	69	63	62	43	48	47	37	44	44
Ploskovni	45	53	52	53	62	63	40	48	47

Primerjava T-rezultatov s F-rezultati pokaže, da so razlike med njimi za nekatere teste minimalne ali jih sploh ni (n. pr. računski), za nekatere pa znatne (n. pr. besedni). To zaradi večje ali manjše stopnje normalnosti distribucij osnovnih testnih rezultatov.

82.26 C-rezultati. Dostikrat so za praktične potrebe T-rezultati prenatančni, ker diferencirajo razlike $0{,}1\,SD$. Prevelika natančnost navajanja testnih rezultatov je problematična tudi zaradi tega, ker dostikrat test ni toliko zanesljiv, da bi zmogel tako diferenciacijo. Zato dostikrat uporabljamo bolj grobe skale C-rezultatov, ki diferencirajo razlike $0{,}5\,SD$. S C-rezultati klasiramo testne rezultate v 10 grup. Tabela 70 kaže osnovne karakteristike C-rezultatov.

Tabela 70. Karakteristike C-rezultatov

C	Sredina razreda		Meje razredov			$f\%$
	z	T	CR	z	T	
10	+ 2,50	75	99	+ 2,25 do + 2,75	73 do 77	1
9	+ 2,00	70	96 do 98	+ 1,75 do + 2,25	68 do 72	3
8	+ 1,50	65	90 do 95	+ 1,25 do + 1,75	63 do 67	7
7	+ 1,00	60	78 do 89	+ 0,75 do + 1,25	58 do 62	12
6	+ 0,50	55	60 do 77	+ 0,25 do + 0,75	53 do 57	17
5	0,00	50	41 do 59	—0,25 do + 0,25	48 do 52	20
4	—0,50	45	23 do 40	—0,75 do —0,25	43 do 47	17
3	—1,00	40	11 do 22	—1,25 do —0,75	38 do 42	12
2	—1,50	35	5 do 10	—1,75 do —1,25	33 do 36	7
1	—2,00	30	2 do 4	—2,25 do —1,75	28 do 32	3
0	—2,50	25	1	—2,75 do —2,25	23 do 27	1

Tabela 70 omogoča direkten prehod centilnih rangov, *z*- ali *T*-rezultatov v *C*-rezultate. Prehod preko *z*-rezultatov je možen le, če je distribucija normalna.

Primer 140. Za dijake A, B in C, za katere izračunavamo testne rezultate v različnih oblikah, so *T*-rezultati prevedeni v *C*-rezultate, dani v tabeli 71.

Tabela 71. *C*-rezultati za dijake A, B in C iz primera 139

Test	*T*-rezultat			*C*-rezultat		
	A	*B*	*C*	*A*	*B*	*C*
Mehanski	68	63	53	9	8	6
Abstraktni	58	69	48	7	9	5
Računski	54	48	50	6	5	5
Besedni	45	43	40	4	4	3
Urnost, natančnost	59	41	46	7	3	4
Spacialni	62	47	44	7	4	4
Ploskovni	52	63	47	5	8	4

C-rezultate smo dobili iz *T*-rezultatov z uporabo tabele 70.

82.27 Skala petih grup. Še bolj groba skala klasira testne rezultate v pet grup, od katerih je vsaka široka po en standardizirani odklon. Če napravimo za ta primer podobno tabelo kot za *C*-rezultate v tabeli 70, dobimo tabelo 72.

Tabela 72. Karakteristike skale petih razredov

Oznaka grupe	Sredina razreda		Meje razredov			$f\,\%$
	z	*T*	*CR*	*z*	*T*	
5	+ 2,0	70	94 do 99	+ 1,5 do + 2,5	66 do 75	7
4	+ 1,0	60	70 do 93	+ 0,5 do + 1,5	56 do 65	24
3	0,0	50	31 do 69	—0,5 do + 0,5	46 do 55	38
2	—1,0	40	7 do 30	—1,5 do —0,5	36 do 45	24
1	—2,0	30	1 do 6	—2,5 do —1,5	26 do 35	7

Ta razdelitev obseže interval 5*SD* ali 98,8 % vseh primerov. Primere, ki morebiti padejo izven teh meja, vključimo v mejne razrede.

Grupe 1 do 5 moremo zaznamovati s prilastki, ki ustrezajo konkretni vsebini pojava, ki ga z njimi klasiramo, n. pr.: 1 — prav slab; 2 — slab; 3 — dober; 4 — prav dober; 5 — odličen, ali drugo zaznamovanje: 1 — zelo podpovprečen; 2 — podpovprečen; 3 — povprečen; 4 — nadpovprečen; 5 — zelo nadpovprečen.

82.3 **Kvalitete testa**

82.31 Zanesljivost testa.

82.311 V dosedanjih poglavjih smo probleme v zvezi s testi idealizirali in predpostavljali, da je testni rezultat odvisen samo od zmožnosti, ki jo meri, in od nobenih drugih dodatnih faktorjev. Vendar se temu idealiziranemu primeru moremo samo bolj ali manj približati. Na rezultat, dosežen pri testiranju, vplivajo razen karakteristike, ki jo merimo s testom, še drugi faktorji. Ti faktorji motijo, da testni rezultat ni objektivno merilo zmožnosti, ki jo z njim merimo. V tej situaciji smatramo test kot zanesljivejši instrument merjenja določene zmožnosti ali druge kvalitete, čimbolj je neodvisen od drugih faktorjev. Popolnoma zanesljiv test bi moral dati iste rezultate, če merimo z njim enako zmožnost. Zelo zanesljiv test dá v teh primerih, če že ne iste, vsaj zelo podobne rezultate. Čim manjša je zanesljivost testa, tem manjša je odvisnost testnih rezultatov od dejanske zmožnosti oziroma kvalitete, ki naj bi jo test meril. Kot pokazatelj zanesljivosti testa moremo smatrati torej korelacijo med dejansko zmožnostjo in rezultati testiranja. Vendar te ideje ne moremo realizirati, ker zmožnost merimo z rezultati testiranja in običajno nimamo absolutnega merila, s katerim bi primerjali rezultate testa. Zaradi tega vzamemo kot merilo zanesljivosti testa korelacijo med rezultati ponovljenega testiranja zmožnosti za isto osebo. V primeru maksimalne zanesljivosti testa bi bil korelacijski koeficient med ponovljenimi podatki enak ena. Čim manjša je zanesljivost testa, tem manjša je tudi korelacija med ponovljenimi testiranji.

Da ocenimo oziroma izmerimo to korelacijo, imamo več postopkov. Vsi ti postopki imajo namen, da ustvarijo čimbolj izenačene pogoje koreliranih testiranj. Vsi so zaradi tega izdelani večinoma na osnovi ene ali druge oblike samokorelacije.

a) *Retestna* (ponavljalna) *metoda* obstoji v tem, da isti test za isto skupino ponovimo in merimo korelacijo med rezultati prvega in drugega testiranja. Pomanjkljivost te metode je v tem, da je testirancem pri ponovitvi testa, če razdobje med enim in drugim testom ni relativno dolgo, testno gradivo znano. To dejstvo je dodaten faktor, ki vpliva na odnose. Ponovitev po daljšem času pa ruši princip enakih pogojev. Zmožnosti testiranih oseb se morejo v tem času spremeniti, in sicer v različni jakosti.

b) *Metoda paralelnih* ali *alternativnih testov* se od zgornje razlikuje v tem, da pri drugem testiranju prvega testa ne ponovimo direktno, temveč vzamemo drug test, ki je prvemu po svojih kvalitetah (meri isto zmožnost, vsebuje enako težke naloge kot prvi) podoben oziroma enak, le da so naloge druge. Ta metoda deloma — ne povsem — eliminira vpliv spomina, ki je pri prvi metodi zelo velik.

c) Po *metodi enakovrednih polovic* razdelimo testne naloge v dve enakovredni grupi. Korelacija med rezultati obeh polovic more rabiti kot merilo zanesljivosti testa. Prednost te metode je v tem, da testa ni treba ponoviti. S tem, da sta obe polovici testa testirani istočasno, so pogoji koreliranih podatkov izenačeni, kolikor je največ možno. Ugovor, da razdelitev testa na polovici ni enolična, drži le v primeru, če je težavnost nalog enaka oziroma podobna. Če pa so naloge razvrščene po težavnosti, je objektivna razdelitev dana s tem, da v prvo polovico vključimo vse lihe, v drugo pa vse sode naloge.

d) *Metoda racionalnih ekvivalenc* ima nasproti zgornji to prednost, da je razdelitev testa v polovici izvršena tako, da od dvojic ekvivalentnih nalog vključimo v vsako polovico po eno.

82.312 Pri vseh navedenih metodah je merilo zanesljivosti testa determinacijski koeficient med dvema testiranjima oziroma deloma testa r_{tt}. Čim večji je r_{tt}, tem večja je zanesljivost testa. Vrednost r_{tt} je v mejah od nič do ena. Računamo, da mora biti $r_{tt} \geq 0{,}90$, če hočemo, da test diferencira posameznike.

Kot indeks zanesljivosti smatramo $r_{1\infty}$, ki ga izračunavamo po obrazcu

$$r_{1\infty} = \sqrt{1 - r_{11}} \tag{194}$$

Pri tem pomeni $r_{1\infty}$ korelacijski koeficient med dejanskim rezultatom testiranja X_1 in pravo vrednostjo X_∞. Standardno pogreško ocene prave vrednosti $\sigma_{1\infty}$ določamo po obrazcu

$$\sigma_{1\infty} = \sigma_1 \sqrt{1 - r_{11}} \tag{195}$$

V teh obrazcih pomeni r_{11} koeficient zanesljivosti testa, σ_1 pa *SD* testnih rezultatov.

Ker se učinek individualnih oziroma slučajnih faktorjev v velikem številu meritev po zakonu velikih števil manjša, sklepamo, da je test, sestavljen iz večjega števila nalog, zanesljivejši. Če zaznamujemo z r_{11} koeficient zanesljivosti znane dolžine 1, z r_{nn} pa koeficient zanesljivosti testa, ki je n-krat daljši, je med njima enostavna računska zveza

$$r_{nn} = \frac{n\, r_{11}}{1 + (n - 1)\, r_{11}} \tag{196}$$

po Spearman-Brownovi formuli. Če ta obrazec preuredimo, moremo z obrazcem

$$n = \frac{r_{nn}\,(1 - r_{11})}{r_{11}\,(1 - r_{nn})} \tag{197}$$

izračunati, kolikokrat daljši test bi dal zaželeno zanesljivost.

S Spearman-Brownovim obrazcem 196 moremo izračunati tudi, kakšna je zanesljivost testa, če jo določamo iz razpolovljenega testa. Če z $r_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ zaznamujemo determinacijski koeficient, izračunan iz polovic, je r_{11} dejansko koeficient zanesljivosti testa, ker meri korelacijo med testi stvarne dolžine. Iz obrazca 196 moremo dobiti r_{11}, če poznamo $r_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$, po obrazcu

$$r_{11} = \frac{2\, r_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}}{1 + r_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}} \tag{198}$$

Primer 141. Koeficient zanesljivosti določenega testa $r_{11} = 0{,}70$. Kolik bi bil koeficient zanesljivosti testa, če bi ga trikrat podaljšali ($n = 3$). Po Spearman-Brownovi formuli dobimo:

$$r_{33} = \frac{3 \cdot 0{,}70}{1 + (3 - 1) \cdot 0{,}70} = 0{,}87$$

Koeficient zanesljivosti trikrat daljšega testa bi bil $r_{33} = 0{,}87$.

Primer 142. Koeficient zanesljivosti določenega testa $r_{11} = 0{,}60$. Kolikokrat daljši test bi dal koeficient zanesljivosti $r_{nn} = 0{,}90$? Po obrazcu 197 dobimo:

$$n = \frac{0{,}90 \cdot (1 - 0{,}60)}{0{,}60 \cdot (1 - 0{,}90)} = 6$$

Šestkrat daljši test bi dal zaželeno zanesljivost $r_{66} = 0{,}90$.

Primer 143. Z metodo alternativnih testov smo dobili $r_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = 0{,}72$. Kolik je koeficient zanesljivosti testa r_{11}? Po obrazcu 193 dobimo:

$$r_{11} = \frac{2 \cdot 0{,}72}{1 + 0{,}72} = 0{,}83$$

Zanesljivost testa je dana s koeficientom zanesljivosti $r_{11} = 0{,}83$.

Primer 144. Standardni odklon testa $SD = 11{,}0$, koeficient zanesljivosti pa $r_{11} = 0{,}83$. Kolika je standardna pogreška ocene prave vrednosti $\sigma_{1\infty}$? Po obrazcu 195 dobimo:

$$= 11{,}0\sqrt{1 - 0{,}83} = 4{,}62$$

Standardna pogreška ocene prave vrednosti je $\sigma_{1\infty} = 4{,}62$.

82.32 O b j e k t i v n o s t t e s t a. Objektivnost testa moremo meriti s korelacijo rezultatov testiranja grupe oseb, ki je bila testirana dvakrat pri različnih eksperimentatorjih. S to korelacijo merimo vpliv eksperimentatorja na rezultat testiranja.

82.33 O b č u t l j i v o s t t e s t a. Test je tem bolj občutljiv, čim manjše diference v zmožnostih registrira. Zaradi tega moremo meriti občutljivost testa s standardnim odklonom testnih rezultatov. Čim večji je *SD* testnih rezultatov, tem občutljivejši je test.

82.34 Veljavnost testa. Veljavnost testa moremo meriti s korelacijo testnih rezultatov, s kakimi od testa neodvisnimi rezultati; n. pr. šolskimi ocenami, produktivnostjo dela, rezultati standardnih testov in podobno. Veljavnost baterije testov pa merimo z multiplo korelacijo n. pr. med uspehom v poklicu in baterijo testnih rezultatov.

Korelacija med testnimi in od testa neodvisnimi rezultati se zmanjša zaradi slučajnih faktorjev, ki vplivajo tako na testne kot neodvisne rezultate. Korekturo koeficienta veljavnosti moremo izvršiti po obrazcu

$$r_{\infty\infty} = \frac{r_{12}}{\sqrt{r_{11}\, r_{22}}} \tag{199}$$

pri čemer pomeni: r_{12} = korelacijski koeficient med testnimi in neodvisnimi rezultati, r_{11} = koeficient zanesljivosti testa; r_{22} = koeficient zanesljivosti neodvisnih rezultatov; $r_{\infty\infty}$ = korigirani koeficient veljavnosti.

Primer 145. Vzemimo, da je korelacijski koeficient med testnimi in neodvisnimi rezultati $r_{12} = 0{,}70$, koeficient zanesljivosti testnih rezultatov $r_{11} = 0{,}80$, koeficient zanesljivosti neodvisnih rezultatov $r_{22} = 0{,}90$. Koliki je korigirani koeficient veljavnosti testa $r_{\infty\infty}$? Po obrazcu 199 dobimo:

$$r_{\infty\infty} = \frac{0{,}70}{\sqrt{0{,}80 \cdot 0{,}90}} = 0{,}82$$

Enako kot iz koeficienta veljavnosti testa, moremo tudi iz standardnega odklona testa eliminirati vpliv slučajnih faktorjev in dobiti *SD* »pravih vrednosti«. To korekturo izvedemo z obrazcem

$$\sigma_{\infty} = \sigma \sqrt{r_{11}} \tag{200}$$

v katerem pomeni: σ_{∞} = korigirani *SD*; σ = izračunani *SD*; r_{11} = koeficient zanesljivosti testa.

83. Drugi problemi skal

S podobnimi predpostavkami o normalnosti razporeditve določene kvalitete, kot smo jo uporabili pri sestavljanju normnih tablic, moremo reševati tudi različne druge probleme.

83.1 Prirejanje numeričnih vrednosti atributom

Znake z numerično osnovo, kot so na primer poštenje, originalnost, soglasnost, uspeh in podobno, izražamo običajno z atributi, ki opisujejo intenziteto pojava.

Tako je na primer uspeh kategoriziran v pet grup: prav slab, slab, dober, prav dober in odličen; soglasnost v pet grup: se absolutno ne strinja, se ne strinja, indiferenten, se strinja, se popolnoma strinja.

Če predpostavljamo, da se kvaliteta z numerično osnovo distribuira v populaciji normalno, moremo za vsako kategorijo znaka, ki je dana kot atribut, določiti njene numerične karakteristike, merjene v standardiziranih odklonih. Za posamezno kategorijo-razred moremo določiti: a) meje razreda, b) povprečno vrednost razreda.

Meje razredov atributivnih kategorij dobimo tako, da iz:

a) po intenziteti urejene frekvenčne distribucije f izračunamo relativne frekvence f^0,

b) iz serije relativnih frekvenc f^0 izračunamo kumulativo F^0,

c) da moremo neposredno uporabiti tablice normalne distribucije iz F^0, izračunamo $F = F^0 - 0{,}5$,

d) v tablicah normalne distribucije poiščemo površinam F ustrezajoče vrednosti z. Te vrednosti so meje razredov atributov.

Aritmetične sredine standardiziranih odklonov po kategorijah M_z pa dobimo po postopku:

a) Iz urejene frekvenčne distribucije po atributu izračunamo enako kot za meje razredov f^0, F^0 in $F = F^0 - 0{,}5$.

b) Poiščemo površinam F ustrezajoče vrednosti ordinat normalne distribucije y (iz tablic normalne distribucije).

c) Določeni kategoriji atributa izračunamo ustrezajočo aritmetično sredino razreda z M_z po obrazcu

$$M_z = \frac{y_s - y_z}{f^0} \tag{201}$$

Pri tem pomeni: y_s in y_z = spodnji in zgornji meji razreda ustrezajoči vrednosti ordinat normalne distribucije, f^0 = relativna frekvenca te kategorije. Ta postopek je znan pod imenom Likertova skala.

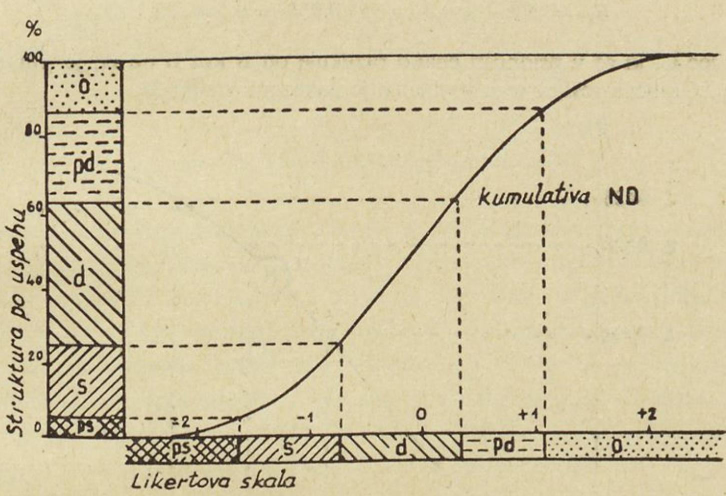
Primer 146. Po uspehu smo klasificirali skupino 178 učencev in dobili distribucijo po ocenah. Posamezne kategorije je treba karakterizirati z mejami in povprečji Likertove skale.

Rezultati v tabeli 73 pokažejo, da so razredi posameznih ocen neenako široki (prav slab: $i = 0{,}91$; slab: $i = 0{,}89$; dober: $i = 1{,}01$; prav dober: $i = 0{,}77$; odličen: $i = 1{,}42$). Idealna širina klasiranja v pet razredov pa bi bila $i = 1{,}00$ za vse razrede. Posebno očita je anomalija med prav dobrimi in odličnimi.

Smisel postopka za ta primer je nakazan v sliki 37.

Tabela 73. Izračunavanje mej in povprečij kategorij atributivnega znaka za Likertovo skalo za razporeditev 178 učencev po uspehu

Ocena	f	f^0	F^0	$F=F^0$—0,5	$z(F)$	$y(F)$	$y_s - y_z$	M_z
			0	—0,500	—∞	0		
Prav slab	10	0,056					—0,1127	—2,01
			0,056	—0,444	—1,59	0,1127		
Slab	33	0,155					—0,1987	—1,07
			0,241	—0,259	—0,70	0,3114		
Dober	68	0,382					—0,0684	—0,18
			0,623	+ 0,123	+ 0,31	0,3798		
Prav dober	42	0,236					+ 0,1561	+ 0,66
			0,859	+ 0,359	+ 1,08	0,2237		
Odličen	25	0,141					+ 0,2237	+ 1,59
	178	1,000	1,000	+ 0,500	+ ∞	0		



Slika 37. Prevedba ocen v Likertovo skalo

83.2 Pretvarjanje ranga v *z*-rezultate

Enotam, ki jih moremo razvrstiti po rangu, moremo kot numeričen izraz kvalitete prirediti rang. Rang pa je iz znanih razlogov slabo merilo. Če predpostavljamo, da se proučevana kvaliteta distribuira v populaciji normalno, moremo kot realnejše merilo kvalitete vzeti standardizirani odklon z, ki je rangu R koordiniran z

$$z\left(F = \frac{R - 0{,}5}{N} - 0{,}5\right)$$

Primer 147. 35 učencev smo razvrstili po pridnosti. Ugotoviti je treba numeričen izraz pridnosti učenca A, ki je dvajseti, in učenca B, ki je osemindvajseti po rangu. Razen tega je treba poiskati rang učenca C, ki je od učenca B enako različen v pridnosti, kot je B od A. Najprej poiščimo z_A in z_B kot merili pridnosti.

$$z_A = z\,[F = (20 - 0{,}5)/35 - 0{,}5] = (z\,(F = 0{,}057) = +0{,}1434$$
$$z_B = z\,[F = (28 - 0{,}5)/35 - 0{,}5] = z\,(F = 0{,}287) = +0{,}7961$$
$$z_C = z_B + (z_B - z_A) = +0{,}7961 + (0{,}7961 - 0{,}1434) = +1{,}4488$$

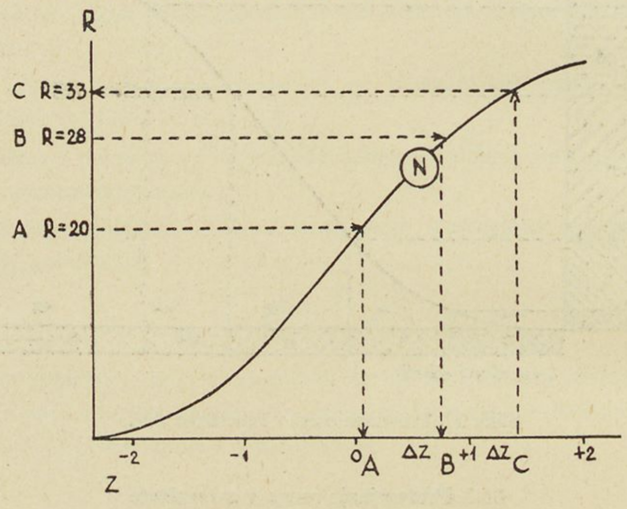
Iz tabele normalne distribucije dobimo:

$$F\,(z_C = 1{,}4488) = 0{,}432$$

Iz tega sledi dalje: $\bar{P} = 0{,}5 + F = 0{,}5 + 0{,}432 = 0{,}932.$
Dalje dobimo po znanem obrazcu

$$R_C = N\bar{P}_C + 0{,}5 = 35 \cdot 0{,}932 + 0{,}5 = 33{,}1$$

Učenec C, ki se v pridnosti enako razlikuje od B kot B od A, je triintrideseti po rangu. Grafična rešitev tega problema je nakazana v sliki 38.

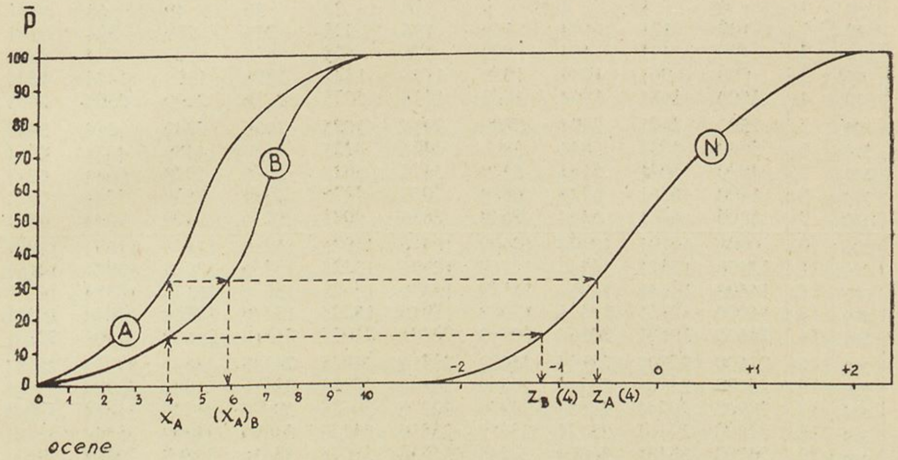


Slika 38. Grafično pretvarjanje ranga v z-rezultate

83.3 Transformacija ocenjevalnih skal

Pri praktičnem ocenjevanju pogosto naletimo na subjektivna ocenjevanja. Zaradi različnih kriterijev, ki jih uporabljamo, so ocene različnih ocenjevalcev neprimerljive. Ocene moremo primerjati med seboj šele, ako jih transformiramo.

Vzemimo, da dva ocenjevalca po točkah od 0 do 10 ocenjujeta stopnjo inteligence istega kolektiva. Distribuciji ocen obeh ocenjevalcev zaradi različnega kriterija ocenjevanja ne bosta isti, kljub temu da sta ocenjevala isto lastnost istega kolektiva.



Slika 39. Transformacija ocenjevalnih skal

Ocene ocenjevalca A moremo prevesti v merilo oziroma skalo ocenjevalca B po kumulativnih frekvenčnih distribucijah ocen posameznih ocenjevalcev, kot je nakazano na sliki 39. Na tej sliki je razvidno, da ocena »4« ocenjevalca A v skali ocenjevalca B ustreza približno oceni »6«. Oba ocenjevalna sistema moremo po standardizirani normalni distribuciji prevesti tudi v *z*-sistem ocenjevanja. Tudi ta postopek je nakazan v sliki 39. Iz nje nazorno vidimo, da oceni »4« ustreza različna *z* ocena za posameznega ocenjevalca. Iz slike je razvidno, da ista ocena »4« pomeni za ocenjevalca A višjo stopnjo inteligence kot za ocenjevalca B.

Če sta distribuciji ocen obeh ocenjevalcev normalni, moremo rezultate ocenjevalca A prevesti v ocene ocenjevalca B po obrazcu

$$(x_A)_B = M_B + \frac{\sigma_B}{\sigma_A}(x_A - M_A) \tag{202}$$

pri čemer pomenijo M_A in M_B aritmetični sredini ocen obeh ocenjevalcev, σ_A in σ_B pa ustrezajoča standardna odklona ocen. x_A pomeni oceno ocenjevalca A, $(x_A)_B$ pa transformirano oceno.

Tabela A. Kvadrati števil 1 — 1000

	Δ / D	d / x / X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
		d	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	
	0	0	x^2 0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	
	20	1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361	
	40	2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841	
	60	3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521	
	80	4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401	
	100	5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481	
	120	6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761	
	140	7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241	
	160	8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921	
	180	9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801	
L	200	10	10000	10201	10404	10609	10816	11025	11236	11449	11664	11881	L
	220	11	12100	12321	12544	12769	12996	13225	13456	13689	13924	14161	
	240	12	14400	14641	14884	15129	15376	15625	15876	16129	16384	16641	
	260	13	16900	17161	17424	17689	17956	18225	18496	18769	19044	19321	
	280	14	19600	19881	20164	20449	20736	21025	21316	21609	21904	22201	
	300	15	22500	22801	23104	23409	23716	24025	24336	24649	24964	25281	
	320	16	25600	25921	26244	26569	26896	27225	27556	27889	28224	28561	
	340	17	28900	29241	29584	29929	30276	30625	30976	31329	31684	32041	
	360	18	32400	32761	33124	33489	33856	34225	34596	34969	35344	35721	
	380	19	36100	36481	36864	37249	37636	38025	38416	38809	39204	39601	
	400	20	40000	40401	40804	41209	41616	42025	42436	42849	43264	43681	
	420	21	44100	44521	44944	45369	45796	46225	46656	47089	47524	47961	
	440	22	48400	48841	49284	49729	50176	50625	51076	51529	51984	52441	
	460	23	52900	53361	53824	54289	54756	55225	55696	56169	56644	57121	
	480	24	57600	58081	58564	59049	59536	60025	60516	61009	61504	62001	
	500	25	62500	63001	63504	64009	64516	65025	65536	66049	66564	67081	
	520	26	67600	68121	68644	69169	69696	70225	70756	71289	71824	72361	
	540	27	72900	73441	73984	74529	75076	75625	76176	76729	77284	77841	
	560	28	78400	78961	79524	80089	80656	81225	81796	82369	82944	83521	
	580	29	84100	84681	85264	85849	86436	87025	87616	88209	88804	89401	
	600	30	90000	90601	91204	91809	92416	93025	93636	94249	94864	95481	
	620	31	96100	96721	97344	97969	98596	99225	99856	100489	101124	101761	S
S	640	32	102400	103041	103684	104329	104976	105625	106276	106929	107584	108241	
	660	33	108900	109561	110224	110889	111556	112225	112896	113569	114244	114921	
	680	34	115600	116281	116964	117649	118336	119025	119716	120409	121104	121801	
	700	35	122500	123201	123904	124609	125316	126025	126736	127449	128164	128881	
	720	36	129600	130321	131044	131769	132496	133225	133956	134689	135424	136161	
	740	37	136900	137641	138384	139129	139876	140625	141376	142129	142884	143641	
	760	38	144400	145161	145924	146689	147456	148225	148996	149769	150544	151321	
	780	39	152100	152881	153664	154449	155236	156025	156816	157609	158404	159201	
	800	40	160000	160801	161604	162409	163216	164025	164836	165649	166464	167281	
	820	41	168100	168921	169744	170569	171396	172225	173056	173889	174724	175561	
	840	42	176400	177241	178084	178929	179776	180625	181476	182329	183184	184041	
	860	43	184900	185761	186624	187489	188356	189225	190096	190969	191844	192721	
	880	44	193600	194481	195364	196249	197136	198025	198916	199809	200704	201601	
	900	45	202500	203401	204304	205209	206116	207025	207936	208849	209764	210681	
	920	46	211600	212521	213444	214369	215296	216225	217156	218089	219024	219961	
	940	47	220900	221841	222784	223729	224676	225625	226576	227529	228484	229441	
	960	48	230400	231361	232324	233289	234256	235225	236196	237169	238144	239121	
	980	49	240100	241081	242064	243049	244036	245025	246016	247009	248004	249001	

Tabela A. Kvadrati števil 1 — 1000 (nadaljevanje)

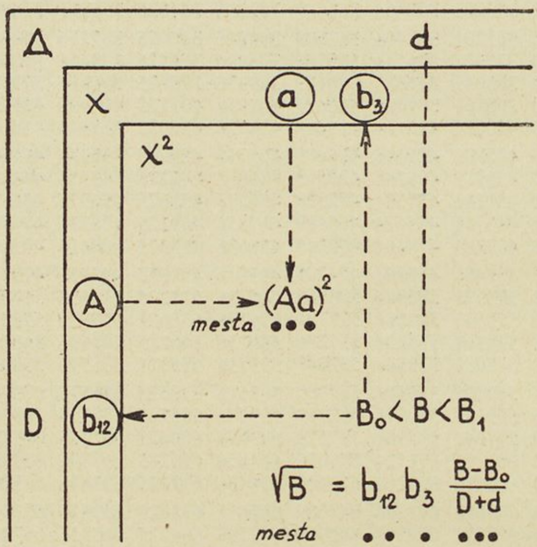
Δ	d	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
D	x X	x 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
S 1000	50	250000	251001	252004	253009	254016	255025	256036	257049	258064	259081 S
1020	51	260100	261121	262144	263169	264196	265225	266256	267289	268324	269361
1040	52	270400	271441	272484	273529	274576	275625	276676	277729	278784	279841
1060	53	280900	281961	283024	284089	285156	286225	287296	288369	289444	290521
1080	54	291600	292681	293764	294849	295936	297025	298116	299209	300304	301401
1100	55	302500	303601	304704	305809	306916	308025	309136	310249	311364	312481
1120	56	313600	314721	315844	316969	318096	319225	320356	321489	322624	323761
1140	57	324900	326041	327184	328329	329476	330625	331776	332929	334084	335241
1180	58	336400	337561	338724	339889	341056	342225	343396	344569	345744	346921
1160	59	348100	349281	350464	351649	352836	354025	355216	356409	357604	358801
1200	60	360000	361201	362404	363609	364816	366025	367236	368449	369664	370881
1220	61	372100	373321	374544	375769	376996	378225	379456	380689	381924	383161
1240	62	384400	385641	386884	388129	389376	390625	391876	393129	394384	395641
1260	63	396900	398161	399424	400689	401956	403225	404496	405769	407044	408321
1280	64	409600	410881	412164	413449	414736	416025	417316	418609	419904	421201
1300	65	422500	423801	425104	426409	427716	429025	430336	431649	432964	434281
1320	66	435600	436921	438244	439569	440896	442225	443556	444889	446224	447561
1340	67	448900	450241	451584	452929	454276	455625	456976	458329	459684	461041
1360	68	462400	463761	465124	466489	467856	469225	470596	471969	473344	474721
1380	69	476100	477481	478864	480249	481636	483025	484416	485809	487204	488601
1400	70	490000	491401	492804	494209	495616	497025	498436	499849	501264	502681
1420	71	504100	505521	506944	508369	509796	511225	512656	514089	515524	516961
1440	72	518400	519841	521284	522729	524176	525625	527076	528529	529984	531441
1460	73	532900	534361	535824	537289	538756	540225	541696	543169	544644	546121
1480	74	547600	549081	550564	552049	553536	555025	556516	558009	559504	561001
1500	75	562500	564001	565504	567009	568516	570025	571536	573049	574564	576081
1520	76	577600	579121	580644	582169	583696	585225	586756	588289	589824	591361
1540	77	592900	594441	595984	597529	599076	600625	602176	603729	605284	606841
1560	78	608400	609961	611524	613089	614656	616225	617796	619369	620944	622521
1580	79	624100	625681	627264	628849	630436	632025	633616	635209	636804	638401
1600	80	640000	641601	643204	644809	646416	648025	649636	651249	652864	654481
1620	81	656100	657721	659344	660969	662596	664225	665856	667489	669124	670761
1640	82	672400	674041	675684	677329	678976	680625	682276	683929	685584	687241
1660	83	688900	690561	692224	693889	695556	697225	698896	700569	702244	703921
1680	84	705600	707281	708964	710649	712336	714025	715716	717409	719104	720801
1700	85	722500	724201	725904	727609	729316	731025	732736	734449	736164	737881
1720	86	739600	741321	743044	744769	746496	748225	749956	751689	753424	755161
1740	87	756900	758641	760384	762129	763876	765625	767376	769129	770884	772641
1760	88	774400	776161	777924	779689	781456	783225	784996	786769	788544	790321
1780	89	792100	793881	795664	797449	799236	801025	802816	804609	806404	808201
1800	90	810000	811801	813604	815409	817216	819025	820836	822649	824464	826281
1820	91	828100	829921	831744	833569	835396	837225	839056	840889	842724	844561
1840	92	846400	848241	850084	851929	853776	855625	857476	859329	861184	863041
1860	93	864900	866761	868624	870489	872356	874225	876096	877969	879844	881721
1880	94	883600	885481	887364	889249	891136	893025	894916	896809	898704	900601
1900	95	902500	904401	906304	908209	910116	912025	913936	915849	917764	919681
1920	96	921600	923521	925444	927369	929296	931225	933156	935089	937024	938961
1940	97	940900	942841	944784	946729	948676	950625	952576	954529	956484	958441
1960	98	960400	962361	964324	966289	968256	970225	972196	974169	976144	978121
1980	99	980100	982081	984064	986049	988036	990025	992016	994009	996004	998001

Tabelo kvadratov 1 do 1000 moremo uporabljati za kvadriranje in korenjenje.

a) *Kvadrati tromestnih števil.*

Pod A poiščemo prvima dvema mestoma ustrezajočo vrsto in tretjemu mestu ustrezajočo kolono. Kjer se dobljena vrsta in kolona sekata, je v tabeli vpisan ustrezajoč kvadrat.

Primer I. $56{,}8^2$. V čelu tabele pogledamo pod 56, v glavi pa pod 8. Križanje dobljene vrste in kolone da $56{,}8^2 = 3226{,}24$



Shema 1. kvadriranje in korenjenje

b) *Kvadrati štiri- in večmestnih števil.*

Tabelo moremo uporabiti kot pomožno tabelo tudi za kvadriranje štiri- in večmestnih števil. Tromestni začetek ali konec števila, ki ga kvadriramo, moremo kvadrirati po tabeli, drug račun pa izvedemo na pamet.

Primer II.	3672^2	367^2	134689	iz tabele
		$367 \cdot 2 \cdot 2$	1468	
		2^2	4	
			13483584	

Primer III. 12876^2

12^2	144	
$2 \cdot 12 \cdot 876$	21024	
876^2	767376	iz tabele
	165791376	

c) *Tri mesta kvadratnega korena.*

Od decimalne pike razdelimo število v grupe številk po dve mesti. Če je število mest pred decimalno piko liho, iščemo koren v odseku *L* tabele kvadratov, če pa je sodo, pa v odseku *S* tabele kvadratov. V tabeli poiščemo, med kateri dve števili B_0 in B_1 pade število *B*, za katerega iščemo kvadratni koren. Za število izmed B_0 in B_1, ki mu je *B* bližji, poiščemo v ustrezajoči vrsti prvi dve, v ustrezajoči koloni pa tretje mesto kvadratnega korena.

Primer IV. $\sqrt{276542} = 526$. 276542 pade med 275625 in 276676. Ker je bliže 276676, vzamemo kot kvadratni koren 526.

d) *Kvadratni koren, izračunan na več mest.*

Kvadratni koren, izračunan na več kot tri mesta, moremo dobiti z linearno interpolacijo. Tako dobimo uporabne vrednosti do največ šest mest. Šesto mesto korena, dobljeno z linearno interpolacijo, se razlikuje od prave vrednosti največ za eno.

V tabeli kvadratov moremo diference zaporednih kvadratov dobiti z uporabo kolone in vrste *D* in *d*. Vsota števil, ki leže v tabeli pod Δ v ustrezajoči vrsti in vmesni koloni, je diferenca dveh zaporednih kvadratov v tabeli.

Kvadratni koren iz *B* izračunamo takole:

V tabeli kvadratov poiščemo, med kateri vrednosti B_0 in B_1 pade prvih pet oziroma šest mest števila *B*, za katerega iščemo kvadratni koren. Pod *x* poiščemo B_0 ustrezajoča prva tri mesta kvadratnega korena. Nadaljnja tri mesta pa dobimo tako, da $B - B_0$ delimo z ustrezajočo vrednostjo Δ.

Primer V. $\sqrt{893}$. Ker je število tromestno, dodamo dve ničli, da dobimo petmestno število: 89300. V odseku *L* tabele kvadratov najdemo, da pade to število med 88804 in 89401. 88804 ustrezajoč koren je 298. Diferenco med zaporednima kvadratoma pa najdemo pod Δ enako: $\Delta = 580 + 17 = 597$. Razlika $B - B_0 = 89300 - 88804 = 496$; $496/597 = 0{,}831$. Glede na število decimalnih mest je kvadratni koren iz 893 enak 29,8831.

Procedura kvadriranja in korenjenja je razvidna tudi iz sheme 1.

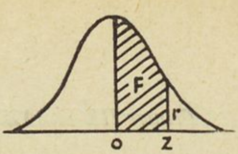


Tabela B. Normalna distribucija

(standardni odklon — z; površina — F; ordinata — y)

$10^2 z$	$10^4 F$	$10^4 y$	$10^2 z$	$10^4 F$	$10^4 y$	$10^2 z$	$10^4 F$	$10^4 y$	$10^2 z$	$10^4 F$	$10^4 y$
00	0000	3989	50	1915	3521	100	3413	2420	150	4332	1295
01	0040	3989	51	1950	3503	101	3438	2396	151	4345	1276
02	0080	3989	52	1985	3485	102	3461	2371	152	4357	1257
03	0120	3988	53	2019	3467	103	3485	2347	153	4370	1238
04	0160	3986	54	2054	3448	104	3508	2323	154	4382	1219
05	0199	3984	55	2088	3429	105	3531	2299	155	4394	1200
06	0239	3982	56	2123	3411	106	3554	2275	156	4406	1182
07	0279	3980	57	2157	3391	107	3577	2251	157	4418	1163
08	0319	3977	58	2190	3372	108	3599	2227	158	4430	1145
09	0359	3973	59	2224	3352	109	3621	2203	159	4441	1127
10	0398	3970	60	2258	3332	110	3643	2179	160	4452	1109
11	0438	3965	61	2291	3312	111	3665	2155	161	4463	1092
12	0478	3961	62	2324	3292	112	3686	2131	162	4474	1074
13	0517	3956	63	2357	3271	113	3708	2107	163	4485	1057
14	0557	3951	64	2389	3251	114	3729	2083	164	4495	1040
15	0596	3945	65	2422	3230	115	3749	2059	165	4505	1023
16	0636	3939	66	2454	3209	116	3770	2036	166	4515	1006
17	0675	3932	67	2486	3187	117	3790	2012	167	4525	0989
18	0714	3925	68	2518	3166	118	3810	1989	168	4535	0973
19	0754	3918	69	2549	3144	119	3830	1965	169	4545	0957
20	0793	3910	70	2580	3123	120	3849	1942	170	4554	0941
21	0832	3902	71	2612	3101	121	3869	1919	171	4564	0925
22	0871	3894	72	2642	3079	122	3888	1895	172	4573	0909
23	0910	3885	73	2673	3056	123	3907	1872	173	4582	0893
24	0948	3876	74	2704	3034	124	3925	1849	174	4591	0878
25	0987	3867	75	2734	3011	125	3944	1827	175	4599	0863
26	1026	3857	76	2764	2989	126	3962	1804	176	4608	0848
27	1064	3847	77	2794	2966	127	3980	1781	177	4616	0833
28	1103	3836	78	2823	2943	128	3997	1759	178	4625	0818
29	1141	3825	79	2852	2920	129	4015	1736	179	4633	0804
30	1179	3814	80	2881	2897	130	4032	1714	180	4641	0790
31	1217	3802	81	2910	2874	131	4049	1692	181	4649	0775
32	1255	3790	82	2939	2850	132	4066	1669	182	4656	0761
33	1293	3778	83	2967	2827	133	4082	1647	183	4664	0748
34	1331	3765	84	2996	2803	134	4099	1626	184	4671	0734
35	1368	3752	85	3023	2780	135	4115	1604	185	4678	0721
36	1406	3739	86	3051	2756	136	4131	1582	186	4686	0707
37	1443	3726	87	3079	2732	137	4147	1561	187	4693	0694
38	1480	3712	88	3106	2709	138	4162	1540	188	4700	0681
39	1517	3697	89	3133	2685	139	4177	1518	189	4706	0669
40	1554	3683	90	3159	2661	140	4192	1497	190	4713	0656
41	1591	3668	91	3186	2637	141	4207	1476	191	4719	0644
42	1628	3653	92	3212	2613	142	4222	1456	192	4726	0632
43	1664	3637	93	3238	2589	143	4236	1435	193	4732	0620
44	1700	3621	94	3264	2565	144	4251	1415	194	4738	0608
45	1736	3605	95	3289	2541	145	4265	1394	195	4744	0596
46	1772	3589	96	3315	2516	146	4279	1374	196	4750	0584
47	1808	3572	97	3340	2492	147	4292	1354	197	4756	0573
48	1844	3555	98	3365	2468	148	4306	1334	198	4762	0562
49	1879	3538	99	3389	2444	149	4319	1315	199	4767	0551

Tabela B. Normalna distribucija (nadaljevanje)

(standardni odklon — z; površina — F; ordinata — y)

10^2z	10^4F	10^4y	10^2z	10^4F	10^4y	10^2z	10^4F	10^4y	10^2z	10^4F	10^4y
200	4773	0540	250	4938	0175	300	4987	0044	350	4998	0009
201	4778	0529	255	4946	0155	305	4989	0038	355	4998	0007
202	4783	0519	260	4953	0136	310	4990	0033	360	4998	0006
203	4788	0508	265	4960	0119	315	4992	0028	365	4999	0005
204	4793	0498	270	4965	0104	320	4993	0024	370	4999	0004
205	4798	0488	275	4970	0091	325	4994	0020	375	4999	0004
206	4803	0478	280	4974	0079	330	4995	0017	380	4999	0003
207	4808	0468	285	4978	0069	335	4996	0015	385	4999	0002
208	4812	0459	290	4981	0060	340	4997	0012	390	5000	0002
209	4817	0449	295	4984	0051	345	4997	0010	395	5000	0002
210	4821	0440									
211	4826	0431									
212	4830	0422									
213	4834	0413									
214	4838	0404									
215	4842	0396									
216	4846	0387									
217	4850	0379									
218	4854	0371									
219	4857	0363									
220	4861	0355									
221	4865	0347									
222	4868	0339									
223	4871	0332									
224	4875	0325									
225	4878	0317									
226	4881	0310									
227	4884	0303									
228	4887	0297									
229	4890	0290									
230	4893	0283									
231	4896	0277									
232	4898	0271									
233	4901	0264									
234	4904	0258									
235	4906	0252									
236	4909	0246									
237	4911	0241									
238	4913	0235									
239	4916	0229									
240	4918	0224									
241	4920	0219									
242	4922	0213									
243	4925	0208									
244	4927	0203									
245	4929	0198									
246	4931	0194									
247	4932	0189									
248	3934	0184									
249	4936	0180									

Da se izognemo decimalkam, so tabelirane vrednosti 10^2z, 10^4F in 10^4y, kar je treba pri končnih rezultatih upoštevati.

S tablicami moremo iz danega z najti $F(z)$ in $y(z)$ in obratno, iz znanega F poiščemo $z(F)$ in $y(F)$.

Primer VI. $z = 1{,}79$. Iz tablic odčitamo $F = 0{,}4633$, $y = 0{,}0804$.

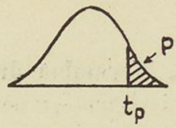
Primer VII. $F = 0{,}397$; $z(F) = 1{,}26$; $y(F) = 0{,}179$. Tabelirane so površine F v intervalu $0 - z$. Druge površine, ki pridejo v poštev poleg F, so dane v tabeli I.

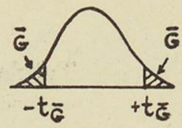
Tabela I. Površine pod normalno distribucijo

Interval	Oznaka	Zveza z F
0 do z	F	F
$-z$ do $+z$	G	$G = 2F$
∞ do $-z$ $+z$ do $+\infty$	$\bar{G}$	$\bar{G} = 1 - 2F$
z do $+\infty$	P	$P = 0{,}5 - F$
$-\infty$ do z	$\bar{P}$	$\bar{P} = 0{,}5 + F$

Slike teh površin so v sliki 12.

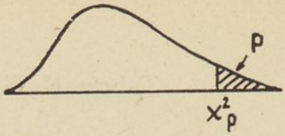
Tabela C. *t*-distribucija





m	*P* 0,25	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0005
	G 0,50	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	1,000	6,31	12,71	31,82	63,66	637
2	0,816	2,92	4,30	6,96	9,92	31,6
3	0,765	2,35	3,18	4,54	5,84	12,9
4	0,741	2,13	2,78	3,75	4,60	8,61
5	0,727	2,02	2,57	3,36	4,03	6,86
6	0,718	1,94	2,45	3,14	3,71	5,96
7	0,711	1,90	2,36	3,00	3,50	5,40
8	0,706	1,86	2,31	2,90	3,36	5,04
9	0,703	1,83	2,26	2,82	3,25	4,78
10	0,700	1,81	2,23	2,76	3,17	4,59
11	0,697	1,80	2,20	2,72	3,11	4,44
12	0,695	1,78	2,18	2,68	3,06	4,32
13	0,694	1,77	2,16	2,65	3,01	4,22
14	0,692	1,76	2,14	2,62	2,98	4,14
15	0,691	1,75	2,13	2,60	2,95	4,07
16	0,690	1,75	2,12	2,58	2,92	4,02
17	0,689	1,74	2,11	2,57	2,90	3,96
18	0,688	1,73	2,10	2,55	2,88	3,92
19	0,688	1,73	2,09	2,54	2,86	3,88
20	0,687	1,72	2,09	2,53	2,84	3,85
21	0,686	1,72	2,08	2,52	2,83	3,82
22	0,686	1,72	2,07	2,51	2,82	3,79
23	0,685	1,71	2,07	2,50	2,81	3,77
24	0,685	1,71	2,06	2,49	2,80	3,74
25	0,684	1,71	2,06	2,48	2,79	3,72
26	0,684	1,71	2,06	2,48	2,78	3,71
27	0,684	1,70	2,05	2,47	2,77	3,69
28	0,683	1,70	2,05	2,47	2,76	3,67
29	0,683	1,70	2,04	2,46	2,76	3,66
30	0,683	1,70	2,04	2,46	2,75	3,65
35	0,682	1,69	2,03	2,44	2,72	3,59
40	0,681	1,68	2,02	2,42	2,71	2,55
45	0,680	1,68	2,02	2,41	2,69	3,52
50	0,679	1,68	2,01	2,40	2,68	3,50
60	0,678	1,67	2,00	2,39	2,66	3,46
70	0,678	1,67	2,00	2,38	2,65	3,44
80	0,677	1,66	1,99	2,38	2,64	3,42
90	0,677	1,66	1,99	2,37	2,63	3,40
100	0,677	1,66	1,98	2,36	2,63	3,39
120	0,676	1,66	1,98	2,36	2,62	3,37
150	0,676	1,66	1,98	2,35	2,61	3,36
200	0,675	1,65	1,97	2,35	2,60	3,34
300	0,675	1,65	1,97	3,34	2,59	3,32
400	0,675	1,65	1,97	2,34	2,59	3,32
500	0,674	1,65	1,96	2,33	2,59	3,31
1000	0,674	1,65	1,96	2,33	2,58	3,30
∞	0,674	1,64	1,96	2,33	2,58	3,29

Tabela D. χ^2-distribucija



$m \backslash P$	0,99	0,95	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,0002	0,004	0,46	1,07	1,64	2,71	3,84	5,41	6,64	10,83
2	0,020	0,103	1,39	2,41	3,22	4,60	5,99	7,82	9,21	13,82
3	0,115	0,35	2,37	3,66	4,64	6,25	7,82	9,84	11,34	16,27
4	0,30	0,71	3,36	4,88	5,99	7,78	9,49	11,67	13,28	18,46
5	0,55	1,14	4,35	6,06	7,29	9,24	11,07	13,39	15,09	20,52
6	0,87	1,64	5,35	7,23	8,56	10,64	12,59	15,03	16,81	22,46
7	1,24	2,17	6,35	8,38	9,80	12,02	14,07	16,62	18,48	24,32
8	1,65	2,73	7,34	9,52	11,03	13,36	15,51	18,17	20,09	26,12
9	2,09	3,32	8,34	10,66	12,24	14,68	16,92	19,68	21,67	27,88
10	2,56	3,94	9,34	11,78	13,44	15,99	18,31	21,16	23,21	29,59
11	3,05	4,58	10,34	12,90	14,63	17,28	19,68	22,62	24,72	31,26
12	3,57	5,23	11,34	14,01	15,81	18,55	21,03	24,05	26,22	32,91
13	4,11	5,89	12,34	15,12	16,98	19,81	22,36	25,47	27,69	34,53
14	4,66	6,57	13,34	16,22	18,15	21,06	23,68	26,87	29,14	36,12
15	5,23	7,26	14,34	17,32	19,31	22,31	25,00	28,26	30,58	37,70
16	5,81	7,96	15,34	18,42	20,46	23,54	26,30	29,63	32,00	39,25
17	6,41	8,67	16,34	19,51	21,62	24,77	27,59	31,00	33,41	40,79
18	7,02	9,39	17,34	20,60	22,76	25,99	28,87	32,35	34.80	42,31
19	7,63	10,12	18,34	21,69	23,90	27,20	30,14	33,69	36,19	43,82
20	8,26	10,85	19,34	22,78	25,04	28,41	31,41	35,02	37,57	45,32
21	8,90	11,59	20,34	23,86	26,17	29,62	32,67	36,34	38,93	46,80
22	9,54	12,34	21,34	24,94	27,30	30,81	33,92	37,66	40,29	48,27
23	10,20	13,09	22,34	26,02	28,43	32,01	35,17	38,97	41,64	49,73
24	10,86	13,85	23,34	27,10	29,55	33,20	36,42	40,27	42,98	51,18
25	11,52	14,61	24,34	28,17	30,68	34,38	37,65	41,57	44,31	52,62
26	12,20	15,38	25,34	29,25	31,80	35,56	38,88	42,86	45,64	54,05
27	12,88	16,15	26,34	30,32	32,91	36,74	40,11	44,14	46,96	55,48
28	13,56	16,93	27,34	31,39	34,03	37,92	41,34	45,42	48,28	56,89
29	14,26	17,71	28,34	32,46	35,14	39,09	42,56	46,69	49,59	58,30
30	14,95	18,49	29,34	33,53	36,25	40,26	43,77	47,96	50,89	59,70

Za χ^2 distribucije, ki imajo $m > 30$, velja: $\chi^2_P = \frac{1}{2}(\sqrt{2m-1} + z_P)^2$, pri čemer je z standardiziran odklon normalne distribucije. Verjetnostim P ustrezajoče vrednosti z so dane v tabeli II.

Tabela II. z-vrednosti

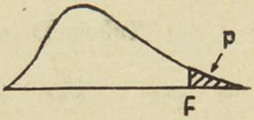
P	z_P
0,99	$-2{,}3263$
0,95	$-1{,}6449$
0,50	0,0000
0,30	$+0{,}5244$
0,20	$+0{,}8416$
0,10	$+1{,}2816$
0,05	$+1{,}6449$
0,02	$+2{,}0537$
0.01	$+2{,}3263$
0,001	$+3{,}0902$

Primer VIII.

$$\chi^2\,(m = 85) = \frac{1}{2}(\sqrt{2 \cdot 85 - 1} + 1{,}6449)^2 = 107{,}24$$

Tabela E. *F*-distribucija

($P = 0{,}05$)



$m_2 \backslash m_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,40	19,41
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60	3,57
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82	2,79
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72	2,69
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45	2,41	2,38
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,52	2,45	2,40	2,35	2,31	2,28
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,43	2,36	2,30	2,26	2,22	2,18
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,34	2,27	2,21	2,16	2,12	2,09
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,07	2,04	2,00
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,02	1,98	1,95
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,14	2,07	2,01	1,97	1,93	1,89
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,10	2,03	2,97	1,92	1,88	1,85
150	3,91	3,06	2,67	2,43	2,27	2,16	2,07	2,00	1,94	1,89	1,85	1,82
200	3,89	3,04	2,65	2,41	2,26	2,14	2,05	1,98	1,92	1,87	1,83	1,80
400	3,86	3,02	2,62	2,39	2,23	2,12	2,03	1,96	1,90	1,85	1,81	1,78
1.000	3,85	3,00	2,61	2,38	2,22	2,10	2,02	1,95	1,89	1,84	1,80	1,76
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	2,01	1,94	1,88	1,83	1,79	1,75

Tabela E. *F*-distribucija (nadaljevanje)

($P = 0{,}05$)

m_2 \ m_1	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞
1	245	246	248	249	250	251	252	253	253	254	254	254
2	19,42	19,43	19,44	19,45	19,46	19,47	19,47	19,48	19,49	19,49	19,50	19,50
3	8,71	8,69	8,66	8,64	8,62	8,60	8,58	8,57	8,56	8,54	8,54	8,53
4	5,87	5,84	5,80	5,77	5,74	5,71	5,70	5,68	5,66	5,65	5,64	5,63
5	4,64	4,60	4,56	4,53	4,50	4,46	4,44	4,42	4,40	4,38	4,37	4,36
6	3,96	3,92	3,87	3,84	3,81	3,77	3,75	3,72	3,71	3,69	3,68	3,67
7	3,52	3,49	3,44	3,41	3,38	3,34	3,32	3,29	3,28	3,25	3,24	3,23
8	3,23	3,20	3,15	3,12	3,08	3,05	3,03	3,00	2,98	2,96	2,94	2,93
9	3,02	2,98	2,93	2,90	2,86	2,82	2,80	2,77	2,76	2,73	2,72	2,71
10	2,86	2,82	2,77	2,74	2,70	2,67	2,64	2,61	2,59	2,56	2,55	2,54
11	2,74	2,70	2,65	2,61	2,57	2,53	2,50	2,47	2,45	2,42	2,41	2,40
12	2,64	2,60	2,54	2,50	2,46	2,42	2,40	2,36	2,35	2,32	2,31	2,30
14	2,48	2,44	2,39	2,35	2,31	2,27	2,24	2,21	2,19	2,16	2,14	2,13
17	2,33	2,29	2,23	2,19	2,15	2,11	2,08	2,04	2,02	1,99	1,97	1,96
20	2,23	2,18	2,12	2,08	2,04	1,99	1,96	1,92	1,90	1,87	1,85	1,84
24	2,13	2,09	2,02	1,98	1,94	1,89	1,86	1,82	1,80	1,76	1,74	1,73
30	2,04	1,99	1,93	1,89	1,84	1,79	1,76	1,72	1,69	1,66	1,64	1,62
40	1,95	1,90	1,84	1,79	1,74	1,69	1,66	1,61	1,59	1,55	1,53	1,51
50	1,90	1,85	1,78	1,74	1,69	1,63	1,60	1,55	1,52	1,48	1,46	1,44
70	1,84	1,79	1,72	1,67	1,62	1,56	1,53	1,47	1,45	1,40	1,37	1,35
100	1,79	1,75	1,68	1,63	1,57	1,51	1,48	1,42	1,39	1,34	1,30	1,28
150	1,76	1,71	1,64	1,59	1,54	1,47	1,44	1,37	1,34	1,29	1,25	1,22
200	1,74	1,69	1,62	1,57	1,52	1,45	1,42	1,35	1,32	1,26	1,22	1,19
400	1,72	1,67	1,60	1,54	1,49	1,42	1,38	1,32	1,28	1,22	1,16	1,13
1.000	1,70	1,65	1,58	1,53	1,47	1,41	1,36	1,30	1,26	1,19	1,13	1,08
∞	1,69	1,64	1,57	1,52	1,46	1,40	1,35	1,28	1,24	1,17	1,11	1,00

Tabela E. *F*-distribucija

($P = 0{,}01$)

m_2 \ m_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022	6056	6082	6106
2	98,49	99,01	99,17	99,25	99,30	99,33	99,34	99,36	99,38	99,40	99,41	99,42
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,54	14,45	14,37
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,27	10,15	10,05	9,96	9,89
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,54	6,47
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,74	5,67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21	5,06	4,95	4,85	4,78	4,71
11	9,65	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,45
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,71	3,56	3,45	3,37	3,30	3,23
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,25	3,17	3,09	3,03
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,06	2,98	2,90	2,84
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,88	2,80	2,73	2,66
50	7,17	5,06	4,20	3,72	3,41	3,18	3,02	2,88	2,78	2,70	2,62	2,56
70	7,01	4,92	4,08	3,60	3,29	3,07	2,91	2,77	2,67	2,59	2,51	2,45
100	6,90	4,82	3,98	3,51	3,20	2,99	2,82	2,69	2,59	2,51	2,43	2,36
150	6,81	4,75	3,91	3,44	3,14	2,92	2,76	2,62	2,53	2,44	2,37	2,30
200	6,76	4,71	3,88	3,41	3,11	2,90	2,73	2,60	2,50	2,41	2,34	2,28
400	6,70	4,66	3,83	3,36	3,06	2,85	2,69	2,55	2,46	2,37	2,29	2,23
1.000	6,66	4,62	3,80	3,34	3,04	2,82	2,66	2,53	2,43	2,34	2,26	2,20
∞	6,64	4,60	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41	2,32	2,24	2,18

Tabela E. F-distribucija (nadaljevanje)

($P = 0,01$)

m_2 \ m_1	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞
1	6142	6169	6208	6234	6258	6286	6302	6323	6334	6352	6361	6366
2	99,43	99,44	99,45	99,46	99,47	99,48	99,48	99,49	99,49	99,49	99,50	99,50
3	26,92	26,83	26,69	26,60	26,50	26,41	26,35	26,27	26,23	26,18	26,14	26,12
4	14,24	14,15	14,02	13,93	13,83	13,74	13,69	13,61	13,57	13,52	13,48	13,46
5	9,77	9,68	9,55	9,47	9,38	9,29	9,24	9,17	9,13	9,07	9,04	9,02
6	7,60	7,52	7,39	7,31	7,23	7,14	7,09	7,02	6,99	6,94	6,90	6,88
7	6,35	6,27	6,15	6,07	5,98	5,90	5,85	5,75	5,75	5,70	5,67	5,65
8	5,56	5,48	5,36	5,28	5,20	5,11	5,06	5,00	4,96	4,91	4,88	4,86
9	5,00	4,92	4,80	4,73	4,64	4,56	4,51	4,45	4,41	4,36	4,33	4,31
10	4,60	4,52	4,41	4,33	4,25	4,17	4,12	4,05	4,01	3,96	3,93	3,91
11	4,29	4,21	4,10	4,02	3,94	3,86	3,80	3,74	3,70	3,66	3,62	3,60
12	4,05	3,98	3,86	3,78	3,70	3,61	3,56	3,49	3,46	3,41	3,38	3,36
14	3,70	3,62	3,51	3,43	3,34	3,26	3,21	3,14	3,11	3,06	3,02	3,00
17	3,35	3,27	3,16	3,08	3,00	2,92	2,86	2,79	2,76	2,70	2,67	2,65
20	3,13	3,05	2,94	2,86	2,77	2,69	2,63	2,56	2,53	2,47	2,44	2,42
24	2,93	2,85	2,74	2,66	2,58	2,49	2,44	2,36	2,33	2,27	2,23	2,21
30	2,74	2,66	2,55	2,47	2,38	2,29	2,24	2,16	2,13	2,07	2,03	2,01
40	2,56	2,49	2,37	2,29	2,20	2,11	2,05	1,97	1,94	1,88	1,84	1,81
50	2,46	2,39	2,26	2,18	2,10	2,00	1,94	1,86	1,82	1,76	1,71	1,68
70	2,35	2,28	2,15	2,07	1,98	1,88	1,82	1,74	1,69	1,62	1,56	1,53
100	2,26	2,19	2,06	1,98	1,89	1,79	1,73	1,64	1,59	1,51	1,46	1,43
150	2,20	2,12	2,00	1,91	1,83	1,72	1,66	1,56	1,51	1,43	1,37	1,33
200	2,17	2,09	1,97	1,88	1,79	1,69	1,62	1,53	1,48	1,39	1,33	1,28
400	2,12	2,04	1,92	1,84	1,74	1,64	1,57	1,47	1,42	1,32	1,24	1,19
1.000	2,09	2,01	1,89	1,81	1,71	1,61	1,54	1,44	1,38	1,28	1,19	1,11
∞	2,07	1,99	1,87	1,79	1,69	1,59	1,52	1,41	1,36	1,25	1,15	1,00

Tabela F. Pretvarjanje korelacijskih koeficientov *r* v Fisherjeve koeficiente *Z*

r	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,20			$r = Z$			0,26	0,27	0,28	0,29	0,30
0,30	0,31	0,32	0,33	0,34	0,35	0,37	0,38	0,39	0,40	0,41
0,40	0,42	0,44	0,45	0,46	0,47	0,48	0,50	0,51	0,52	0,54
0,50	0,55	0,56	0,58	0,59	0,60	0,62	0,63	0,65	0,66	0,68
0,60	0,69	0,71	0,73	0,74	0,76	0,78	0,79	0,81	0,83	0,85
0,70	0,87	0,89	0,91	0,93	0,95	0,97	1,00	1,02	1,05	1,07
0,80	1,10	1,13	1,16	1,19	1,22	1,26	1,29	1,33	1,38	1,42
0,90	1,47	1,53	1,59	1,66	1,74	1,83	1,95	2,09	2,30	2,65
0,905	1,50	1,56	1,62	1,70	1,78	1,89	2,01	2,18	2,44	2,99

Primer IX. $r = 0{,}78 : Z = 1{,}05$ *Primer X.* $Z = 1{,}25 : r = 0{,}85$

Tabela G. $\sin x$, $\cos x$, $\sqrt{1 - r^2}$

	x		0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°			
r	0°	sin	,000	,017	,035	,052	,070	,087	,105	,122	,139	,156	cos	80°	$\sqrt{1-r^2}$
$\sqrt{1-r^2}$		cos	1,000	1,000	,999	,999	,998	,996	,995	,993	,990	,988	sin		r
r	10°	sin	,174	,191	,208	,225	,242	,259	,276	,292	,309	,326	cos	70°	$\sqrt{1-r^2}$
$\sqrt{1-r^2}$		cos	,985	,982	,978	,974	,970	,966	,961	,956	,951	,946	sin		r
r	20°	sin	,342	,358	,375	,391	,407	,423	,438	,454	,469	,485	cos	60°	$\sqrt{1-r^2}$
$\sqrt{1-r^2}$		cos	,940	,934	,927	,920	,914	,906	,899	,891	,883	,875	sin		r
r	30°	sin	,500	,515	,530	,545	,559	,574	,588	,602	,616	,629	cos	50°	$\sqrt{1-r^2}$
$\sqrt{1-r^2}$		cos	,866	,857	,848	,839	,829	,819	,809	,799	,788	,777	sin		r
r	40°	sin	,643	,656	,669	,682	,695	,707					cos	40°	$\sqrt{1-r^2}$
$\sqrt{1-r^2}$		cos	,766	,755	,743	,731	,719	,707					sin		r
			10°	9°	8°	7°	6°	5°	4°	3°	2°	1°		x	

Tabelo H moremo uporabljati istočasno kot tabelo trigonometričnih funkcij $\sin x$ in $\cos x$ za izračunavanje tetrakoričnega korelacijskega koeficienta r_t po obrazcu 89 in za izračunavanje koeficienta $\sqrt{1 - r^2}$, ki ga potrebujemo pri izračunavanju standardne pogreške ocene po obrazcu 70.

Primer XI. $\cos 62° = 0{,}454$

Primer XII. $\sqrt{1 - 0{,}73^2} = 0{,}68$

Tabela H. Tablica slučajnih števil

5354	9142	0847	5393	5416	6505	7156	5634	9703	6221
0905	6986	9396	3975	9255	0537	2479	4589	0562	5345
1420	0470	8679	2328	3939	1292	0406	5428	3789	2882
3218	9080	6604	1813	8209	7039	2086	3386	4437	3798
9697	8431	4387	0622	6893	8788	2320	9358	5904	9539
0912	4964	0502	9683	4636	2861	2876	1273	7870	2030
4636	7072	4868	0601	3894	7182	8417	2367	7032	1003
2515	4734	9878	6761	5636	2949	3979	8650	3430	0635
5964	0412	5012	2369	6461	0678	3693	2928	3740	8047
7848	1523	7904	1521	1455	7089	8094	9872	0898	7174
5192	2571	3643	0707	3434	6818	5729	8614	2498	4129
8438	8325	9886	1805	0226	2310	3675	5058	2515	2388
8166	6349	0319	5436	6838	2460	6433	0644	7428	8556
9158	8263	6504	2562	1160	1526	1816	9690	1215	9590
6061	3525	4048	0382	4224	7148	8259	6526	5340	4064
5407	2818	0520	5941	1740	5149	9844	2847	1502	0763
0469	0435	2858	7116	3297	8454	5146	9803	1694	7949
7805	8428	5745	8141	8465	4795	1895	4487	2323	1068
7294	1214	0170	9643	7891	7304	8278	2315	7139	5594
5480	2843	8903	3828	1717	6312	0384	6252	1200	7264
1017	0106	1414	9736	3886	4753	3589	3864	0073	3626
0858	1727	3020	1831	2878	2838	1319	2199	6457	5798
8396	8903	2156	1031	6182	5094	1931	9188	1672	1510
7813	4209	5295	0605	9080	6940	9657	3423	2191	3636
2712	2516	0968	7526	2176	4057	9023	2327	4311	0281
7141	7871	2878	2990	3907	8375	6005	9452	7702	9468
2418	9661	0436	1223	9708	9354	0707	4238	0756	2190
5230	6208	2742	1087	9639	6813	1963	2620	8913	7777
3517	1376	7866	6584	6381	0218	1101	3192	5965	5250
0319	0951	3976	6372	3518	1859	9038	3474	5150	3621
7526	7460	5644	8640	0643	0916	3238	0177	2592	0264
5172	1898	6030	6677	8827	7821	9933	9523	4563	7391
2023	0950	1896	4729	1789	1111	1157	0266	0438	7535
3632	3816	4575	0738	4923	4131	0819	3361	3992	6702
0761	2838	6166	8534	5353	5737	1204	2325	2036	4714

LITERATURA

Anderson R. L., Bancroft T. A.: Statistical Theory in Research; New York; McGraw-Hill; 1952.

Cochran W. G. and Cox G. M.: Experimental Design; New York; Wiley; 1956.

Edwards A. L.: Experimental Design in Psycological Research; New York; Wiley; 1950.

Garret H. E.: Statistic in Psychology and Education; Green and Comp; 1937.

Johnson P. O.: Statistical Methods in Research; New York; Prentice-Hall; 1949.

Kelley T. L.: Fundamentals of Statistics; Cambridge Mass.: Harvard University Press; 1947.

Lindquist E. F.: Statistical Analysis in Educational Research; Boston; Houghton Mifflin; 1940.

Siegel S.: Nonparametric Statistics for the Behavioral Sciences; New York; McGraw-Hill; 1956.

Snedecor G. W.: Statistical Methods; Iowa; The Iowa State College Press; 1957.

PREGLED VSEBINE

NATISNILA TISKARNA ČZP »LJUDSKA PRAVICA«
V LJUBLJANI