razlikovanje med več ključi potrebovali več različnih oznak, a se je izkazalo drugače – če ima profesor na okroglem nosilcu šest ali več ključev, bo za učinkovito razlikovanje med njimi potreboval le dve različni oznaki.

Razlikovalno število grafa

Zgoraj predstavljeni problem so raziskovalci pred približno dvajsetimi leti posplošili tako, da nosilec za ključe ni bil več nujno okrogel in da so definirali **razlikovalno število** poljubnega grafa G, $D(G)$ kot najmanjše število d, za katerega obstaja razlikovalna označitev grafa G z d različnimi oznakami. Koncept razlikovalnega števila je bil vpeljan v članku M. O. Albertson in K. L. Collins, *Symmetry breaking in graphs*, Electron. J. Combin. 3(1996), R18. Danes smo torej določili razlikovalno število ciklov in ugotovili, da je $D(C_3) = D(C_4) = D(C_5) = 3$ ter $D(C_n) = 2$ za $n \geq 6$. O znanih razlikovalnih številih drugih grafov pa več kdaj drugič.

× × ×

Naloga

MARKO RAZPET

→ Izračunaj

- $6^2 - 5^2,\ 56^2 - 45^2,\ 556^2 - 445^2,\ 5556^2 - 4445^2.$

Nato rezultate posploši na razliko kvadratov oblike

- $\underbrace{55\ldots5}_{n}6^2 - \underbrace{44\ldots4}_{n}5^2.$

Rešitev

Uporabimo enakost $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ in dobimo:

- $6^2 - 5^2 = (6-5)(6+5) = 1 \cdot 11 = 11,$
- $56^2 - 45^2 = (56-45)(56+45) = 11 \cdot 101 = 1111,$
- $556^2 - 445^2 = (556-445)(556+445) = 111 \cdot 1001 = 111111,$
- $5556^2 - 4445^2 = (5556-4445)(5556+4445) = 1111 \cdot 10001 = 11111111.$

Predvidevamo, da velja enakost

- $$\underbrace{55\ldots5}_{n}6^2 - \underbrace{44\ldots4}_{n}5^2 = \underbrace{11\ldots1}_{2n+2}. \qquad (1)$$

Če hočemo (1) zares izpeljati, ne le uganiti, se moramo spomniti, kaj desetiški mestni zapis števil sploh pomeni. 1949 je npr. le krajši zapis števila $1 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 9$. Brez težav pa lahko krajše izrazimo vsoto $S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$, kjer je q poljubno število, ki ni enako 1, n pa poljubno naravno število. Ker je $qS_n = q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + q^{n+1} = S_n - 1 + q^{n+1}$, dobimo S_n iz enačbe $qS_n = S_n + (q^{n+1} - 1)$:

- $$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

V posebnem primeru $q = 10$ je

- $$1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^n = \frac{1}{9}(10^{n+1} - 1). \qquad (2)$$

Enakost (1) lahko sedaj z uporabo mestnega zapisa in (2) preverimo tako:

- $$\begin{aligned}
&\underbrace{55\ldots5}_{n}6^2 - \underbrace{44\ldots4}_{n}5^2 = \\
&= (\underbrace{55\ldots5}_{n}6 - \underbrace{44\ldots4}_{n}5)(\underbrace{55\ldots5}_{n}6 + \underbrace{44\ldots4}_{n}5) = \\
&= \underbrace{11\ldots1}_{n+1} \cdot 1\underbrace{00\ldots0}_{n}1 = \\
&= (10^n + \ldots + 10 + 1)(10^{n+1} + 1) = \\
&= \frac{1}{9}(10^{n+1} - 1)(10^{n+1} + 1) = \frac{1}{9}((10^{n+1})^2 - 1) = \\
&= \frac{1}{9}(10^{2n+2} - 1) = \\
&= 1 + 10 + \ldots + 10^{2n+1} = \underbrace{11\ldots1}_{2n+2}.
\end{aligned}$$

× × ×