

nas. Ilustrirana je s številnimi skicami ter črno-belimi in barvnimi fotografijami. Vprašanja so smiselno razdeljena v 12 logičnih sklopov.

Naštejmo samo nekaj vprašanj, s katerimi se knjiga ukvarja. Ali se da matematično opisati obliko jajca? Ali King Kong, ki ga poznamo iz filmov, sploh lahko zares obstaja? Koliko daleč stran je nevihta? Kako visoko lahko zraste drevo? Zakaj imajo nekatera drevesa rakaste tvorbe? Kako dolgo bo še obstajalo naše Sonce? Zakaj se lahko vname prevelika kopa sena? Zakaj se kapljice na pajkovi mreži pravilno razporedijo? Kako oceniti maso buče brez tehtanja? Kako nastane mavrica? Avtor se posveti tudi nebu, rečnim zavojem, svetlobi, sencam, valovom, lepoti snežink in rastlin, pri katerih se seveda ne more izogniti Fibonaccijevemu zaporedju in zlatemu razmerju, ter še mnogim drugim zanimivim pojavom v naravi.

V dodatku so na kratko opisane matematične vsebine, nujno potrebne za razumevanje nekaterih delov knjige, odgovori na nekatera vprašanja, Newtonov zakon ohlajanja in seznam matematičnih vzorcev v naravi. Čisto na koncu pa je naveden še obširen seznam literature, ki mu sledita stvarno kazalo in osnovni podatki o avtorju knjige. Razkrijmo samo naslednje: John A. Adam je profesor matematike na Old Dominion University v Norfolku v Virginiji. Napisal je, sam ali v soavtorstvu, že več knjig s sorodno vsebino, na primer *Mathematics in Nature (Matematika v naravi)*.

Kdor je le malo naravoslovno in matematično navdahnjen, bo pritrdil, da je knjiga pravi biser poljudnoznanstvenega pisanja in vsekakor zanimiva tudi za učitelje naravoslovnih predmetov in matematike, ker vsebuje dejanske primere iz narave neposredno okoli nas, ne pa ustaljenih, pogosto za lase privlečenih nalog, kakršnih smo navajeni iz raznih učbenikov in ustreznih zbirk. Predavateljem naravoslovnih vsebin in matematike na višjih in visokih šolah pa je lahko odličen pripomoček za popestritev njihovih predavanj.

Marko Razpet

Valery G. Romanovski in Douglas S. Shafer: THE CENTER AND CYCLICITY PROBLEMS – A COMPUTATIONAL ALGEBRA APPROACH, Birkhäuser, Basel 2009, 348 strani.

Dr. Valerij Romanovski je študiral matematiko na Leningrajski državni univerzi v nekdanji Sovjetski zvezi. Pred prihodom v Slovenijo je delal v Kazahstanu, v Severni Osetiji in v Belorusiji. Od leta 2000 dalje je zaposlen na Centru za uporabno matematiko in teoretično fi-

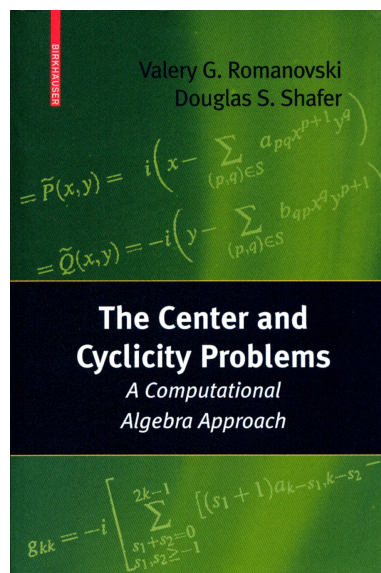
ziko Univerze v Mariboru. Leta 2002 je pridobil državljanstvo Republike Slovenije. Raziskuje predvsem diferencialne enačbe, še posebej polinomske diferencialne enačbe v ravnini, in je eden od vodilnih strokovnjakov na tem področju. Med drugim je bistveno prispeval k napredku pri reševanju slavnega Hilbertovega šestnajstega problema.

Center za uporabno matematiko in teoretično fiziko Univerze v Mariboru (CAMPT) je bil ustanovljen 1990. leta in ga že ves čas vodi prof. dr. Marko Robnik. Čeprav majhen po številu sodelavcev, je CAMPT znanstvenoraziskovalno izredno

uspešen, predvsem na področju teoretične fizike in uporabne matematike, še posebej na področju nelinearne dinamike ter kvantnega kaosa, teorije dinamičnih sistemov in diferencialnih enačb. Ima zelo razvejeno mednarodno sodelovanje in redno organizira mednarodne poletne šole „Let’s Face Chaos through Nonlinear Dynamics“ in druga odmevna mednarodna srečanja. Več o CAMPT lahko najdemo na spletni strani <http://www.camtp.uni-mb.si/>.

Številne naravne pojave ter znanstvene in tehnološke modele lahko opišemo s pomočjo teorije dinamičnih sistemov, ki prav zato postaja eno najpomembnejših in najhitreje rastočih področij uporabne matematike. Dinamične sisteme najbolj pogosto predstavimo kot sisteme diferencialnih enačb. Ker pa so sistemi diferencialnih enačb zelo redko integrabilni, običajno študiramo lastnosti rešitev takšnih sistemov in njihove fazne portrete. V primeru 2-dimenzionalnih sistemov moramo za opis faznega portreta najti singularne točke in ugotoviti njihov tip ter poiskati limitne cikle in separatrične povezave med singularnimi točkami. Danes sicer obstajajo učinkovite metode za opredelitev tipa singularnih točk, vendar žal še ne poznamo sistematičnih splošnih metod za opredelitev limitnih ciklov in separatričnih povezav, zato lahko najdemo limitne cikle in takšne povezave samo v posebnih primerih.

Fazni portret sistema diferencialnih enačb se spremeni, če spremenimo parametre sistema, zato je eden izmed osrednjih vidikov teorije dinamičnih sistemov raziskovanje bifurkacij rešitev. Teorija bifurkacij ima velik pomen v različnih uporabnih in tehničnih znanostih, saj lahko z njeno pomočjo



določimo stabilne režime sistema. Ena najbolj raziskovanih bifurkacij v dinamičnih sistemih je bifurkacija izoliranih periodičnih rešitev, t. i. limitnih ciklov. V zadnjem času je veliko pozornosti usmerjene v študij problema bifurkacij kritičnih period (tj. problema določitve števila periodičnih rešitev, ki ohranijo periodo pri majhnih motnjah sistema), ki se je izkazal za zelo podobnega problemu bifurkacij limitnih ciklov in ga lahko preučujemo s podobnimi metodami.

Eden najbolj znanih problemov v teoriji navadnih diferencialnih enačb je še vedno nerešeni Hilbertov šestnajsti problem o iskanju števila izoliranih periodičnih rešitev (limitnih ciklov) 2-dimenzionalnih sistemov polinomskih diferencialnih enačb (diferencialni sistemi s polinomi na desni strani). Kljub temu da je problem star že več kot sto let, ni rešen niti za kvadratične sisteme. Problem bifurkacij limitnih ciklov nedegenerirane singularne točke, tako imenovani *lokalni Hilbertov šestnajsti problem* ali *problem cikličnosti*, je bistven del Hilbertovega šestnajstega problema. Eden prvih večjih prispevkov k študiju problema cikličnosti je delo N. N. Bautina (1952), ki je rešil problem cikličnosti za kvadratične sisteme in predlagal splošni postopek za študij problema.

Če so vse orbite v okolici singularne točke 2-dimenzionalnega sistema navadnih diferencialnih enačb ovalne, potem singularno točko imenujemo center (središče), in v tem primeru so vse rešitve v okolici konstantne rešitve periodične. Ena večjih težav, ki se pojavi pri študiju problema cikličnosti, je v tem, da je na prvem koraku treba rešiti Poincaréjev problem centra, tj. najti vse sisteme s centrom znotraj dane parametrične družine ravninskih sistemov navadnih diferencialnih enačb. Ta problem je leta 1908 prvi obravnaval francoski matematik H. Dulac in ga rešil za primer kvadratičnega sistema. O problemu centra in fokusa je bilo napisanih že na stotine člankov. Vendar je rešen za kvadratične sisteme in za kubične sisteme v obliki linearne centra, motenega s homogenimi kubičnimi nelinearnostmi (za t. i. Kuklesov sistem), in še za nekaj reprezentativnih družin polinomskih sistemov. K temu sta v številnih originalnih člankih veliko prispevala prav avtorja te monografije.

Delo obravnava problema centra in cikličnosti za polinomske sisteme navadnih diferencialnih enačb. Ključna značilnost sedanjega načina študija problema cikličnosti je v tem, da v primeru elementarne singularne točke problem cikličnosti reduciramo na algebraini problem iskanja baze ideala polinomov, porojenega s fokusnimi količinami sistema (t. i. Bautinov ideal).

Ena osnovnih težav v študiju problema centra izhaja iz izračuna raznoterosti ideala, porojenega s fokusnimi količinami (koeficienti Poincaréjeve preslikave). To je dejansko algebraični problem: najti dekompozicijo množice ničel sistema polinomov (dekompozicijo raznoterosti ideala polinomov), zato prvo poglavje knjige obravnava sodobne metode in računalniške algoritme študija polinomskih idealov, ki temeljijo na teoriji Groebnerjevih baz. To poglavje je neodvisno od preostalega dela knjige in bi bilo lahko zanimivo celo za študente matematike prvih letnikov, ker daje uvod v osnovne koncepte teorije polinomskih kolobarjev, njihovih idealov in raznoterosti ter kaže, kako reševati sisteme algebraičnih polinomov.

Drugo poglavje začne analizo diferencialnih enačb in predstavlja uvod v Ljapunovo teorijo stabilnosti in teorijo normalnih form diferencialnih enačb, ki je eno osnovnih orodij analize diferencialnih enačb. Uvod v teorijo normalnih form je praktičen, ne pretirano tehničen in lahko razumljiv.

V tretjem poglavju je predstavljen postopek, kako se lotiti problema centra, ki temelji na teoriji normalnih form, kompleksifikaciji sistema in uporabi algebraičnih metod iz prvega poglavja ter softverskih orodij računalniške algebre. Opisani so osnovni mehanizmi za dokaz obstoja centra in analitičnega integrala v polinomskih sistemih, ki običajno privedejo do rešitve problema. Predstavljen je tudi učinkovit algoritem za računanje fokusnih količin 2-dimenzionalnih diferencialnih sistemov ter Darbouxjeva metoda integrabilnosti takih sistemov. Zadnje podpoglavje je posvečeno tako imenovanemu Liénardovemu sistemu, ki je pomemben za številne aplikacije.

Če imajo vse periodične rešitve v okolici centra isto periodo, tedaj je center izohron. Problem izohronosti je najti pogoje, pri katerih bo center izohron. Izohronost so raziskovali že v 17. stoletju, ko je Christian Huygens opazil, da nihajna ura niha z monotono padajočo periodo in torej oscilira s krajšo periodo, kadar ima manjšo energijo, tj. ko se vzmet ure odvija. Želel je narediti uro, ki bi oscilirala izohrono in tako bila bolj natančna ter bi jo lahko uporabljali pri ladijski navigaciji. Njegova rešitev, cikloidno nihalo, je najbrž prvi nelinearni izohroni primer. Sodobni način reševanja problema izohronosti je predstavljen v četrtem poglavju, kjer je pokazano, da je izohronost diferencialnega sistema ekvivalentna lokalni linearizabilnosti sistema. V poglavju je predstavljen učinkovit način študija problema izohronosti, vključno z algoritmom za izračunavanje potrebnih pogojev za izohronost in linearizabilnost diferencialnega sistema, ter metode konstruk-

cije transformacij za linearizacijo diferencialnih sistemov.

Peto poglavje je posvečeno polinomskim invariantam sistemov diferencialnih enačb. Te invariante omogočajo predstaviti pomemben pojav v sistemih diferencialnih enačb – časovno reverzibilnost sistema. V poglavju je predstavljen algoritem za izračunavanje množice vseh časovnoreverzibilnih sistemov znotraj neke parametrične družine sistemov diferencialnih enačb. Algoritem je pridobljen na osnovi študija invariant grupe rotacij diferencialnega sistema in algebraičnih metod iz prvega poglavja.

Zadnje poglavje obravnava problem cikličnosti. Ključna značilnost predstavljenega načina obravnave problema cikličnosti je, da v primeru elementarne singularne točke problem cikličnosti reduciramo na algebraični problem iskanja baze ideala polinomov, porojenega s fokusnimi količinami sistema (t. i. Bautinov ideal). Z uporabo algoritmov računske algebre iz prvega poglavja v primeru, ko je ideal radikalen, problem rešimo na eleganten način. V primeru, ko je ideal neradikalen, se problem izkaže za veliko zahtevnejšega, vendar je predstavljen tudi postopek, ki deluje v nekaterih primerih neradikalnih idealov. V zadnjem času je veliko pozornosti usmerjene v študij problema bifurkacij kritičnih period. Ta problem se je izkazal za zelo podobnega problemu bifurkacij limitnih ciklov, preučujemo ga lahko s podobnimi metodami in je obravnavan v zadnjem podpoglavju.

Knjiga je dobro strukturirana in dobro napisana. Ponuja temeljno znanje za specialiste s področja diferencialnih enačb, ki se zanimajo za uporabo algebraičnih metod pri študiju lastnosti dinamičnih sistemov, ter za specialiste s področja računalniške algebre, ki se zanimajo za netrivialno uporabo algebraičnih metod. Prvi bodo ugotovili, da so metode in softverska orodja računalniške algebre učinkovite in visoko zmogljive za študij njihovih problemov, drugi pa bodo spoznali vrsto problemov iz teorije diferencialnih enačb, ki so zahtevni in spodbudni, zanje so te algebraične metode lahko uporabne in učinkovite. Primeri in naloge, ki so zbrani na koncu vsakega poglavja, bodo pomagali bralcu razumeti osnovne ideje. Menim, da bo ta monografija imela pomemben vpliv na raziskave in aplikacije algebraičnih metod ter računalniških orodij za študij problemov centra in cikličnosti, pa tudi za študij splošnih nelinearnih diferencialnih enačb.

Dušan Repovš