R√
čob

Jože Grasselli

SEBI ADJUNGIRANI ELEMENTI V BANACHOVI ALGEBRI BREZ ENOTE

Ljubljana 1961

Množica B elementov x, y, z, ... je Banachova algebra ([1], [2], [3]), če ima naslednje lastnosti:

a) B je algebra nad obsegom kompleksnih števil

b) B je Banachov prostor

c) za vsaka dva elementa $x, y \in B$ velja $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$.

Zahteva a) pomeni, da je v Banachovi algebri definirano seštevanje elementov, množenje elementov in skalarno množenje (množenje kompleksnih števil z elementi). Ako označimo s črko Z množico kompleksnih števil, je torej pri $x, y \in B$, $\alpha \in Z$ vedno tudi $x + y \in B$, $xy \in B$, $\alpha x \in B$. Operaciji seštevanja in množenja s skalarji imata vse lastnosti kot v linearnem vektorskem prostoru. Množenje je asociativno in distributivno, množenje in skalarno množenje pa zamenljivo. Za vsak $x, y, z \in B$ in za vsak $\alpha \in Z$ velja torej

$$(xy)z = x(yz), \quad (x + y)z = xz + yz$$
$$(y + z)x = yx + zx, \quad x(\alpha y) = \alpha(xy)$$

Po zahtevi b) je v Banachovi algebri definirana norma, to je funkcija, ki prireja vsakemu elementu $x \in B$ nenegativno število $\|x\| \geqq 0$ tako, da je

$$\|x\| = 0 \qquad \text{le za } x = \Theta$$
$$\|x + y\| \leqq \|x\| + \|y\| \qquad x, y \in B$$
$$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \qquad x \in B, \ \alpha \in Z$$

Nadalje sledi iz zahteve b), da je vsako Cauchyjevo zaporedje elementov iz Banachove algebre konvergentno. Prav tako so zaradi b) in c) vse v Banachovi algebri definirane operacije zvezne.

Če vsebuje Banachova algebra enoto, to je takšen element $1 \in B$, da je $x1 = 1x$ za vsak $x \in B$, zahtevamo poleg a), b), c) tudi

d) $\|1\| = 1$

Včasih je v Banachovi algebri definirana še operacija, ki prireja vsakemu elementu $x \in B$ neki element $x^* \in B$ in ima lastnosti

a') $x^{**} = x$

b') $(\alpha x + \beta y)^* = \bar{\alpha} x^* + \bar{\beta} y^*$ $\qquad x, y \in B; \ \alpha, \beta \in Z$

c') $(xy)^* = y^* x^*$

To operacijo imenujemo involucija, Banachovo algebro, ki ima definirano involucijo, pa involutivna Banachova algebra; označevali jo bomo z znakom B^*. Ako izpolnjuje vsak element involutivne Banachove algebre pogoj

d') $\|x^* x\| = \|x\|^2$

pravimo, da je Banachova algebra popolnoma regularna oz. da ima popolnoma regularno involucijo. Popolnoma regularno Banachovo algebro zapisujemo z znakom (B^*).

Važen primer popolnoma regularne Banachove algebre z enoto je množica (C^*) omejenih linearnih operatorjev v Hilbertovem prostoru. Poleg študija tega konkretnega primera Banachove algebre ([4], [5]) se je v zadnjih dvajsetih letih močno razmahnilo raziskovanje abstraktnih Banachovih algeber. Doseženi rezultati sestavljajo celo teorijo, ki je bila s pridom uporabljena v raznih področjih analize. Naj od pomembnejših rezultatov omenimo nekatere, ki se tičejo reprezentacije oz. realizacije Banachovih algeber.

L. 1941 je I.M. Gelfand dokazal ([6]), da je vsaka komutativna Banachova algebra B z enoto homomorfna neki algebri zveznih kompleksnih funkcij na kompaktnem prostoru. Jedro tega homomorfizma je radikal algebre B. V posebnem primeru, ko je v radikalu algebre B le element θ, je torej algebra B izomorfna neki algebri zveznih kompleksnih funkcij na kompaktnem prostoru. Če komutativna Banachova algebra nima enote, je homomorfna neki algebri zveznih kompleksnih funkcij, ki so definirane na lokalno kompaktnem prostoru in enake 0 v točki neskončno ([2]).

Za komutativne popolnoma regularne Banachove algebre so izsledki še zanimivejši. Vsaka komutativna popolnoma regularna Banachova algebra (B^*) z enoto je namreč izometrično izomorfna algebri vseh zveznih kompleksnih funkcij, ki imajo za definicijsko območje prostor vseh maksimalnih idealov algebre (B^*) ([7]). Komutativna Banachova algebra, ki ne vsebuje enote, a je popolnoma regularna, pa je izometrično-izomorfna algebri vseh tistih zveznih kompleksnih funkcij $x(t)$ na nekem lokalno kompaktnem prostoru T, ki ustrezajo pogoju $\lim x(t) = 0$ za $t \to \infty$ ([2]).

Za teorijo nekomutativnih Banachovih algeber je posebno važno Gelfandovo in Neumarkovo odkritje, kako se da reprezentirati nekomutativna popolnoma regularna Banachova algebra. Po [7] in [8] je vsaka popolnoma regularna Banachova algebra (B^*) izometrično-izomorfna neki algebri (C^*) omejenih linearnih operatorjev v Hilbertovem prostoru. Vsakemu elementu $x \in (B^*)$ pripada torej neki operator $A_x \in (C^*)$. V (C^*) imamo s prehodom od operatorja na adjungirani operator že definirano involucijo. Preslikava $x \to A_x$ pa je takšen izomorfizem, da involuciji iz (B^*) ustreza v (C^*) ravno prehod od operatorja na adjungirani operator: tako da iz $x \to A_x$, $x^* \to A_{x^*}$ sledi $(A_x)^* = A_{x^*}$. Zaradi izometričnosti preslikave $x \to A_x$ je nadalje $\|x\| = \|A_x\|$. Glede topoloških in algebrajskih lastnosti torej ni nobene razlike med to konkretno algebro (C^*) in abstraktno Banachovo algebro (B^*). V tem smislu je torej popolna regularnost značilna lastnost algebre omejenih linearnih operatorjev Hilbertovega prostora.

Je pa še neka drugačna značilnost, ki dovoljuje v dani Banachovi algebri razpoznati algebro omejenih linearnih operatorjev nekega Hilbertovega prostora. Odkril jo je prof.dr. I. Vidav, ko je dokazal [9], da je Banachova algebra B z enoto popolnoma regularna, če izpolnjuje B naslednje pogoje:

a'') Vsak element $x \in B$ je možno vsaj na en način izraziti v obliki $x = h + ig$, pri čemer je $h, g \in H$, $H \subset B$ in $i^2 = -1$.

b´´) Ako spada h v množico H in je ξ realno število, velja $\|1 + i\xi h\| \leq 1 + o(\xi)$ za $\xi \to 0$.

c´´) Za vsak $h \in H$ obstaja takšna razcepitev elementa $h^2 = u + iv$, $u, v \in H$, da je $uv = vu$.

Pri izpolnjenih pogojih a´´), b´´), c´´) je namreč za vsak $x \in B$ izražava $x = h + ig$, $h, g \in H$, enolična. Potem pa pripada vsakemu elementu $x \in B$ en sam element $x^* = h - ig \in B$ in izkaže se, da ima tako definirana operacija $*$ lastnosti involucije a´), b´), c´). K normi $\|\cdot\|$, ki je od začetka dana v B, eksistira takšna ekvivalentna norma, za katero velja tudi d´) pri vsakem $x \in B$. Če tedaj v algebri B preidemo na to ekvivalentno normo, je algebra B popolnoma regularna, saj izpolnjuje pogoje a´), b´), c´), d´). Od tod sledi z upoštevanjem že omenjenega izreka o reprezentaciji popolnoma regularne Banachove algebre: vsaka Banachova algebra B z lastnostmi a´´), b´´), c´´) ima k dani normi ekvivalentno normo, v kateri je algebra B izometrično-izomorfna neki algebri omejenih linearnih operatorjev v Hilbertovem prostoru.

Lastnosti a´´), b´´), c´´) so zadostne za obstoj popolnoma regularne involucije v Banachovi algebri z enoto. Enota nastopa pri formulaciji pogoja b´´), uporabljena je pa tudi pri dokazovanju v [9]. V tej zvezi mi je prof. dr. I. Vidav dal naslednjo nalogo: postaviti k sistemu a´´), b´´), c´´) analogen sistem brez sklicevanja na enoto. Iskani sistem naj bo torej skupek zadostnih lastnosti za obstoj popolnoma regularne involucije v Banachovi algebri, ki bodisi enote nima, bodisi ni znano, ali enoto ima ali je nima.

V nadaljnjem bomo reševali problem za Banachovo algebro brez enote. Zanjo bomo poiskali sistem lastnosti, ki zagotavlja obstoj popolnoma regularne involucije, v taki obliki, da bo v primeru Banachove algebre z enoto vseboval pogoje a´´), b´´), c´´). Takšen sistem lastnosti omogoča vpeljati popolnoma regularno involucijo tudi v tistih Banachovih algebrah, za katere se ne ve, kako je z enoto: če imajo enoto, je to možno zaradi izpolnjenih pogojev a´´), b´´), c´´); če enote nimajo, pa tudi, saj izpolnjujejo pogoje, ki so v Banachovi algebri brez enote v ta namen zadostni.

II

Naj pomeni v tem razdelku B Banachovo algebro brez enote. Podobno kot v [9], [10] hočemo najprej opredeliti pojem sebi adjungiranega elementa v B in izpeljati nekaj lastnosti takšnih elementov. V sledeči definiciji pomeni ξ realno število, i imaginarno enoto $i^2 = -1$, $o(\xi)$ pa takšno funkcijo spremenljivke ξ, da je $\lim o(\xi)/\xi = 0$ pri $\xi \to 0$.

Definicija. Element $u \in B$ imenujemo sebi adjungiran, ako izpolnjuje pogoj

$$\|x + i\xi ux\| \leqq \|x\| + o(\xi) \tag{1}$$

za vsak $x \in B$ pri $\xi \to 0$. Množico vseh sebi adjungiranih elementov iz B bomo označevali s H.

Funkcija $o(\xi)$ je v splošnem za vsak element x drugačna.

Pripomnimo še, da iz (1) takoj sledi $\|x + i\xi ux\| = \|x\| + o(\xi)$ za $\xi \to 0$. Iz

$$\|x + (i/2)(\xi_1 + \xi_2)ux\| \leqq (1/2)(\|x + i\xi_1 ux\| + \|x + i\xi_2 ux\|)$$

se namreč vidi, da je norma $\|x + i\xi ux\|$ pri fiksnih x in u konveksna funkcija parametra ξ. Zato ima v vsaki točki desni in levi odvod ([11], str. 63). Naj bo v točki $\xi = 0$ vrednost desnega odvoda D in vrednost levega odvoda L. Za vrednosti ξ

v okolici števila 0 velja tedaj

$$\|x + i\xi ux\| = \|x\| + D\xi + o(\xi) \leq \|x\| + o(\xi), \qquad \xi \geq 0$$
$$\|x + i\xi ux\| = \|x\| + L\xi + o(\xi) \leq \|x\| + o(\xi), \qquad \xi \leq 0$$

Ker sta te dve neenačbi izpolnjeni, mora biti $D \leq 0$, $L \geq 0$. Za vsak majhen pozitiven ξ imamo nadalje

$$\|x\| = \|x + i(\xi - \xi)ux\| \leq (1/2)\|x + i\xi ux\| + (1/2)\|x - i\xi ux\| =$$
$$= (1/2)\|x\| + (1/2)D\xi + (1/2)\|x\| + (1/2)L(-\xi) + o(\xi)$$

ali $0 \leq D - L + o(\xi)/\xi$. To je pa protislovje, kakor hitro ni $D = L = 0$.

Očitno spada element Θ vedno v H. Lahko se zgodi, da je to tudi edini sebi adjungirani element. Vzemimo množico M vseh funkcij $x(\xi)$ kompleksne spremenljivke ξ, ki so analitične v notranjosti in zvezne na robu enotnega kroga ter enake 0 pri $\xi = 0$. Vsota in produkt dveh funkcij iz M je spet neka funkcija, ki spada v M; prav tako je v M vsak produkt $\alpha x(\xi)$, $\alpha \in Z$, $x(\xi) \in M$. Od konstant je v M vsebovana edino funkcija $x(\xi) \equiv 0$, saj ima vsaka druga konstanta pri $\xi = 0$ od nič različno vrednost. Torej je M brez enote. Če vpeljemo normo na način $\|x(\xi)\| = \max_{|\xi| \leq 1} |x(\xi)|$, je M v tej normi Banachova algebra brez enote. Da so izpolnjene vse zahteve za normo, se takoj vidi. Polnost pa sledi iz dejstva, da je vsako Cauchyjevo zaporedje funkcij iz M enakomerno konvergentno; limitna funkcija takega zaporedja je zaradi tega analitična z območjem regularnosti $|\xi| < 1$ in ima očitno pri $\xi = 0$ vrednost 0. Pozneje bomo čisto splošno ugotovili (stavek 2), da imajo vsi elementi iz H realen spekter. Uporabimo to lastnost v zdajšnjem primeru! V spekter funkcije $x(\xi) \in M$ spada poleg 0 vsako število $\lambda \neq 0$, za katero ni v M takšne funkcije $y(\xi)$, da bi bilo $x(\xi) + \lambda y(\xi) - x(\xi)y(\xi) = 0$. Ker je $y(\xi) = x(\xi)/(x(\xi) - \lambda)$, so torej v spektru funkcije $x(\xi)$ ravno vse njene funkcijske vrednosti. V H pa spadajo potem tiste funkcije iz M, ki zavzamejo le realne vrednosti. Toda v množici M je edina takšna funkcija $x(\xi) \equiv 0$.

Take primere hočemo v nadaljnjem izključiti z zahtevo: B naj bo takšna algebra, da množica H ne vsebuje le element Θ. Da nismo zahtevali kaj nemogočega, kaže med drugim zgled kompaktnih operatorjev v prostoru l_2. Skupnost vseh teh operatorjev $B(l_2)$ tvori Banachovo algebro brez enote. Množica H, kakor jo določa pogoj (1), je pa identična z množico hermitskih kompaktnih operatorjev.

Ugotovimo najprej, da spada vsak hermitski kompaktni operator $u = u^*$ v H! Označimo s črko x poljuben kompakten operator $x \in B(l_2)$ in s črko a poljuben vektor iz prostora l_2. Potem je za realen $\xi \to 0$

$$\|x + i\xi ux\| = \sup_{\|a\|=1} \|xa + i\xi uxa\| =$$

$$= \sup_{\|a\|=1} \left[(xa,xa) + i\xi(uxa,xa) - i\xi(xa, uxa) + \xi^2(uxa,uxa)\right]^{1/2} =$$

$$= \sup_{\|a\|=1} \left[(xa,xa) + \xi^2(uxa,uxa)\right]^{1/2} = \sup_{\|a\|=1}\left[\|xa\|^2 + \xi^2\|uxa\|^2\right]^{1/2} \leq$$

$$\leq \left[\|x\|^2 + \xi^2 \|u\|^2 \|x\|^2\right]^{1/2} = \|x\| + o(\xi)$$

Vsak hermitski kompaktni operator torej res ustreza pogoju (1). Videti je treba še, da je z hermitskimi operatorji izčrpana vsa množica H. To gotovo drži, če je možno k vsakemu kompaktnemu operatorju $u \in B(l_2)$, ki ni hermitski, najti takšen kompakten operator $x \in B(l_2)$, da pogoj (1) ni izpolnjen.

Naj bo $u \in B(l_2)$ kakšen nehermitski kompakten operator. Potem se da zapisati na način $u = r + is$, kjer sta r in s hermitska kompaktna operatorja. Tudi operator $x + i\xi ux \in B(l_2)$ in njegova norma se glasi

$$\|x + i\xi ux\| = \|x + i\xi(r + is)x\| = \|x - \xi sx + i\xi rx\| =$$

$$= \sup_{\|a\|=1} \|xa - \xi sxa + i\xi rxa\| = \sup_{\|a\|=1} \Big[(xa,xa) - 2\xi(sxa,xa) +$$

$$+ \xi^2\{(rxa,rxa) + (sxa,sxa) + i(sxa,rxa) - i(rxa,sxa)\}\Big]^{1/2}$$

Za $\xi \to 0$ dobimo od tod

$$\|x + i\xi ux\| = \sup_{\|a\|=1} \left[(xa,xa) - 2\xi(sxa,xa)\right]^{1/2} + o(\xi) \qquad (2)$$

Kakor vsak linearni operator v l_2 ([12] ,str.504) se tudi operatorja r in s izražata z matrikami

$$r = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \cdots \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & \cdots \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$s = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & \dots \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & \dots \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Členi $r_{11}, r_{12}, \dots, s_{11}, s_{12}, \dots$ so kompleksna števila. Pri tem je $r_{ik} = \bar{r}_{ki}$ in $s_{ik} = \bar{s}_{ki}$, ker sta operatorja r in s hermitska. Nadalje je $s \neq 0$, saj operator u ni hermitski.

α) Vzemimo, da je v matriki s kak diagonalni člen različen od 0, n.pr. $s_{kk} \neq 0$. Matrika

$$x = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \qquad x_{mn} = \begin{cases} 1 \text{ pri } m = n = k \\ 0 \text{ v vseh drugih primerih} \end{cases}$$

predstavlja kompakten operator v l_2. Operatorju sx ustreza matrika, ki jo dobimo, če v s ohranimo k-ti stolpec, vse druge člene pa postavimo enake 0

$$sx = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & s_{1k} & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & s_{2k} & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & s_{3k} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Nadalje velja za poljuben vektor $a \in l_2$

$$a = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \dots)$$
$$xa = (0, 0, 0, \dots, a_k, 0 \dots)$$
$$sxa = (s_{1k}a_k, s_{2k}a_k, s_{3k}a_k, \dots)$$
$$(xa, xa) = a_k\bar{a}_k$$
$$(sxa, xa) = s_{kk}a_k\bar{a}_k$$

Upoštevajmo te izraze v (2). Dobimo $\|x + i\xi ux\| = 1 - \xi s_{kk} + \dots$ Ker je $\|x\| = 1$ in $s_{kk} \neq 0$, pogoj (1) res ni izpolnjen.

β) Oglejmo si zdaj primer, ko ima operatorju s ustrezajoča matrika na glavni diagonali same ničle, a je v njej vsaj en člen z od 0 različno realno komponento. Recimo, da je to člen s_{jk}. Tedaj je $s_{jk} + s_{kj} = s_{jk} + \bar{s}_{jk}$ realno število in ne 0. Vzemimo operator x, kakor ga določa matrika, ki ima v presečiščih j-tega in k-tega stolpca z j-to in k-to vrstico člene enake 1, povsod drugje pa same ničle

$$x = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 1 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 1 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \qquad x_{mn} = \begin{cases} 1 \text{ če je: } m=n=j;\, m=k, n=j; \\ \qquad\qquad m=j, n=k;\, m=n=k; \\ 0 \text{ v vseh drugih primerih} \end{cases}$$

Iz same definicije se vidi, da je operator x kompakten. Operator sx se zdaj izraža z matriko, katere k-ti in j-ti stolpec sta vsoti k-tega in j-tega stolpca matrike s, vsi drugi členi pa so enaki 0.

$$sx = \begin{pmatrix} 0 \dots 0 \; s_{1j} + s_{1k} \; 0 \dots 0 \; s_{1j} + s_{1k} \; 0 \dots \\ 0 \dots 0 \; s_{2j} + s_{2k} \; 0 \dots 0 \; s_{2j} + s_{2k} \; 0 \dots \\ 0 \dots 0 \; s_{3j} + s_{3k} \; 0 \dots 0 \; s_{3j} + s_{3k} \; 0 \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{pmatrix}$$

Za poljuben vektor $a \in l_2$ je potem

$$a = (a_1, a_2, a_3, \dots\dots, a_j, \dots\dots, a_k, \dots)$$
$$xa = (0,0,0,\dots\dots,0,a_j+a_k,0,\dots\dots,0,a_j+a_k,0,\dots)$$
$$sxa = (s_{1j} + s_{1k}, s_{2j} + s_{2k}, \dots)(a_j + a_k)$$
$$(xa,xa) = 2(a_j + a_k)(\bar{a}_j + \bar{a}_k)$$
$$(sxa,xa) = (s_{jk} + s_{kj})(a_j + a_k)(\bar{a}_j + \bar{a}_k)$$

Z upoštevanjem teh izrazov v (2) dobimo $\|x + i\xi ux\| = 2 - (s_{jk} + s_{kj})\xi + \dots$ Ker je zdaj $\|x\| = 2$ in $s_{jk}+s_{kj} \neq 0$, noben kompakten operator te vrste ni sebi adjungiran.

γ) Preostane še primer, ko ima operatorju s ustrezajoča matrika na glavni diagonali same ničle, od preostalih členov pa nobeden nima od 0 različne realne komponente. V matriki so torej poleg členov z vrednostjo 0 samo še členi, ki jih predstavljajo čisto imaginarna števila. Ker $s \neq 0$, je neki člen n.pr. $s_{jk} \neq 0$.

Matrika

$$x = \begin{pmatrix} 0 \ldots 0 \ldots 0 \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \ldots i \ldots i \ldots \\ 0 \ldots 0 \ldots 0 \ldots \\ 0 \ldots 1 \ldots 1 \ldots \\ 0 \ldots 0 \ldots 0 \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{pmatrix} \qquad x_{mn} = \begin{cases} i \text{ pri: } m=n=j;\ m=j,\ n=k; \\ 1 \text{ pri: } m=k,\ n=j;\ m=n=k; \\ 0 \text{ v vseh drugih primerih} \end{cases}$$

predstavlja kompak~~ten~~ operator. Operator sx je tvorjen podobno kot v primeru β): v j-tem in k-tem stolpcu stoje vsote k-tega in z i pomnoženega j-tega stolpca matrike s, vsi ostali členi so enaki 0.

$$sx = \begin{pmatrix} 0 \ldots 0\ is_{1j} + s_{1k}\ 0 \ldots 0\ is_{1j} + s_{1k}\ 0 \ldots \\ 0 \ldots 0\ is_{2j} + s_{2k}\ 0 \ldots 0\ is_{2j} + s_{2k}\ 0 \ldots \\ 0 \ldots 0\ is_{3j} + s_{3k}\ 0 \ldots 0\ is_{3j} + s_{3k}\ 0 \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{pmatrix}$$

Za poljuben vektor $a \in l_2$ velja

$$a = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_j, \ldots, a_k, \ldots)$$
$$xa = (0, 0, 0, \ldots, 0, ia_j + ia_k, 0, \ldots, 0, a_j + a_k, 0, \ldots)$$
$$sxa = (is_{1j} + s_{1k}, is_{2j} + s_{2k}, \ldots)(a_j + a_k)$$
$$(xa, xa) = 2(a_j + a_k)(\bar{a}_j + \bar{a}_k)$$
$$(sxa, xa) = -2is_{jk}(a_j + a_k)(\bar{a}_j + \bar{a}_k)$$

Izraz (2) se torej zdaj glasi $\|x + i\xi ux\| = 2 + 2i\xi s_{jk} + \dots$ in zaradi $\|x\| = 2$, $s_{jk} \neq 0$, spet ne drži pogoj (1).

Ker pripada vsakemu kompaktnemu nehermitskemu operatorju v l_2 matrika ene od oblik obravnavanih v α), β), γ), noben takšen operator ni sebi adjungiran. Torej se v Banachovi algebri kompaktnih operatorjev prostora l_2 množica H ujema z množico hermitskih kompaktnih operatorjev.

Ugotovimo zdaj nekaj lastnosti za elemente iz množice H.

Stavek 1. Če je $u \in H$ in ξ realno število, je $\|e^{i\xi u}x\| = \|x\|$ za vsak $x \in B$.

Dokaz. Element $e^{\xi u}x$, $\xi \in Z$, je definiran z vrsto

$$e^{\xi u}x = x + \xi ux + (\xi^2/2!)u^2x + (\xi^3/3!)u^3x + \dots \qquad (3)$$

Ker je ta vrsta za vsak ξ, u in x absolutno konvergentna in je algebra B polna, je res $e^{\xi u}x \in B$. Če je tudi $\xi_1 \in Z$, je iz istega razloga $e^{\xi_1 u}e^{\xi u}x \in B$ in $e^{(\xi_1+\xi)u}x = e^{(\xi+\xi_1)u}x \in B$. V absolutno konvergentnih vrstah pa smemo člene pisati v poljubnem redu, tako da velja

$$e^{(\xi_1+\xi)u}x = e^{\xi_1 u}.e^{\xi u}x = e^{\xi u}.e^{\xi_1 u}x$$

Pri fiksnih elementih u in x je $\varphi(\xi) = \log\|e^{i\xi u}x\|$ neka funkcija realne spremeljivke ξ. Iz pogoja (1) sledi, da je funkcija $\varphi(\xi)$ odvedljiva za vsak ξ. Ako je namreč η realno število in pišemo $e^{i\xi u}x = y$, je

$$\varphi'(\xi) = \lim_{\eta\to 0}(1/\eta)\left[\varphi(\xi+\eta) - \varphi(\xi)\right] = \lim_{\eta\to 0}(1/\eta)\left[\log\|e^{i(\xi+\eta)u}x\| - \right.$$

$$\left. - \log\|e^{i\xi u}x\|\right] = \lim_{\eta\to 0}(1/\eta)\left[\log\|e^{i\eta u}.e^{i\xi u}x\| - \log\|e^{i\xi u}x\|\right] =$$

$$= \lim_{\eta\to 0}(1/\eta)\left[\log\|e^{i\eta u}y\| - \log\|y\|\right] = \lim_{\eta\to 0}(1/\eta)\left[\log\|y+i\eta uy\| - \right.$$

$$\left. - \log\|y\|\right] = \lim_{\eta\to 0}(1/\eta)\left[\log\|y\| + o(\eta)/\|y\| + \ldots - \log\|y\|\right] = 0$$

Funkcija $\varphi(\xi)$ je torej konstanta. Zaradi $\varphi(0) = \log\|x\|$, je potem $\|e^{i\xi u}x\| = \|x\|$. Za poljubno kompleksno število $\zeta = \xi + i\eta$, kjer sta ξ, η realna, je tedaj $\|e^{\zeta u}x\| = \|e^{(\xi+i\eta)u}x\| = \|e^{i\eta u}.e^{\xi u}x\| = \|e^{\xi u}x\|$.

Stavek 2. a) Ako je $u \in H$ in α realno število, je $\alpha u \in H$.
b) Obenem z u, $v \in H$ je tudi $u + v \in H$ ter $i(uv - vu) \in H$.
c) Če v algebri B ni takšnih elementov $x \neq \Theta$, da bi bilo $xy = \Theta$ za vsak $y \in B$, je pri $u, v \in H$ $u + iv = \Theta$ le za $u = v = \Theta$.
d) Množica H je zaprta v B.
e) Spekter vsakega elementa $u \in H$ je realen.

Dokaz.

a) Ker iz $\xi \to 0$ sledi $\alpha\xi \to 0$ in je $\alpha\xi$ realno število, je

$$\|x + i\xi(\alpha u)x\| = \|x + i(\alpha\xi)ux\| = \|x\| + o(\alpha\xi) = \|x\| + o(\xi)$$

To dokazuje trditev a).

b) Po stavku 1 je pri $u, v \in H$ $\|e^{i\xi u}.e^{i\xi v}x\| =$
$= \|e^{i\xi v}x\| = \|x\|$. Vrednost na levi strani pa lahko izrazimo še drugače. Po definiciji vrste (3) je namreč

$$e^{i\xi v}x = x + i\xi vx - (\xi^2/2!)\,v^2x - (i\,\xi^3/3!)\,v^3x + \dots$$
$$e^{i\xi u}.e^{i\xi v}x = e^{i\xi v}x + i\xi ue^{i\xi v}x - (\xi^2/2!)u^2e^{i\xi v}x + \dots =$$
$$= (x + i\xi vx - (\xi^2/2!)v^2x - \dots) + i\xi u(x + i\xi vx - (\xi^2/2!)v^2x -$$
$$- \dots) - (\xi^2/2!)(\dots) = x + i\xi(u + v)x + \xi^2(\dots)$$

Za $\xi \to 0$ velja torej

$$\|e^{i\xi u}.e^{i\xi v}x\| = \|x + i\xi(u + v)x\| + O(\xi^2)$$

Če upoštevamo, da ima leva stran vrednost $\|x\|$, kakor smo že zgoraj ugotovili, dobimo zaradi $\lim\limits_{\xi\to 0} O(\xi^2)/\xi = 0$,

$$\|x + i\xi(u + v)x\| = \|x\| + o(\xi)$$

ali $u + v \in H$. Po stavku 1 je nadalje pri $u, v \in H$

$$\|e^{i\xi u}e^{i\xi v}e^{-i\xi u}e^{-i\xi v}x\| = \|e^{i\xi v}e^{-i\xi u}e^{-i\xi v}x\| =$$
$$= \|e^{-i\xi u}e^{-i\xi v}x\| = \|e^{-i\xi v}x\| = \|x\|$$

Enako dobimo

$$\|e^{i\xi v}e^{i\xi u}e^{-i\xi v}e^{-i\xi u}x\| = \|x\|$$

Po drugi strani pa je

$$e^{-i\xi v}x = x - i\xi vx - (\xi^2/2!)\, v^2x - \dots$$

$$e^{-\xi i\, u}e^{-i\xi v}x = x - i\xi(u + v)x - (\xi^2/2!)(u^2 + 2uv + v^2)x - \dots$$

$$e^{i\xi v}e^{-i\xi u}e^{-i\xi v}x = x - i\xi ux - (\xi^2/2!)(u^2 + 2uv - 2vu)x - \dots$$

$$e^{i\xi u}e^{i\xi v}e^{-i\xi u}e^{-i\xi v}x = x - \xi^2(uv - vu)x + \xi^3(\dots)$$

Prav podobno najdemo

$$e^{i\xi v}e^{i\xi u}e^{-i\xi v}e^{-i\xi u}x = x + \xi^2(uv - vu)x + \xi^3(\dots)$$

Ako v zadnjih dveh enačbah upoštevamo, da je norma elementov na levi strani enaka $\|x\|$, dobimo za $\xi \to 0$

$$\|x - \xi^2(uv - vu)x\| = \|x\| + O(\xi^3)$$
$$\|x + \xi^2(uv - vu)x\| = \|x\| + O(\xi^3)$$

Za vsako realno število $\xi \to 0$ je torej $\|x + \xi(uv - vu)x\| = \|x\| + o(\xi)$ ali $i(uv - vu) \in H$.

c) Funkcija $f(\zeta) = e^{\zeta u}x$, $\zeta = \xi + i\eta$, ξ, η realni števili, je definirana z vrsto (3) in prireja vsakemu številu $\xi \in Z$ pri fiksnih $u \in H$ in $x \in B$ neki element iz B. Ker je $u + iv = \Theta$, dobimo po stavku 1

$$\|f(\xi)\| = \|e^{\xi u}x\| = \|e^{(\xi + i\eta)u}x\| = \|e^{\xi u}.e^{i\eta u}x\| = \|e^{-i\xi v}.e^{i\eta u}x\| =$$
$$= \|e^{i\eta u}x\| = \|x\|$$

Funkcija $f(\xi)$ je torej v vsej kompleksni ravnini omejena. Po posplošenem Liouvillovem izreku ([3] ,str.100) mora tedaj biti konstanta. Ker je pa $f(0) = x$, je $f(\xi) = x$. Od tod sledi, da je $ux = \Theta$ za vsak $x \in B$. Po predpostavki je to možno le, ako je $u = \Theta$. Potem je pa tudi $v = \Theta$.

d) Naj bo a stekališče množice H. Za vsako število $\varepsilon > 0$ je tedaj možno najti pri fiksnem $x \in B$ tak element u_ε iz H, da je $\|u_\varepsilon - a\| < \varepsilon / \|x\|$. Ker je pa za vse dovolj majhne pozitivne ξ

$$\|x + i\xi u_\varepsilon x\| = \|x\| + o(\xi) \leqq \|x\| + |o(\xi)| < \|x\| + \varepsilon\xi$$
$$\|x - i\xi u_\varepsilon x\| = \|x\| + o(\xi) \geqq \|x\| - |o(\xi)| > \|x\| - \varepsilon\xi$$

velja

$$\|x + i\xi ax\| \leqq \|x + i\xi u_\varepsilon x\| + \xi\|u_\varepsilon - a\|\,\|x\| < \|x\| + 2\varepsilon\xi$$
$$\|x - i\xi ax\| \geqq \|x - i\xi u_\varepsilon x\| - \xi\|u_\varepsilon - a\|\,\|x\| > \|x\| - 2\varepsilon\xi$$

To pomeni, da je $\|x + i\xi a x\| = \|x\| + o(\xi)$ pri $\xi \to 0$. Ker lahko takšno oceno izpeljemo za vsak x iz B, je element a v množici H.

e) Spekter elementa $u \in H$ leži na kompleksni ravnini v notranjosti kroga s središčem v 0 in s polmerom $\|u\| + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Vzemimo, da je v spektru kompleksno število $\alpha + i\beta$, z realno komponento α in z imaginarno komponento $\beta \neq 0$. Tedaj je $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \leq \|u\|$. Naj pomeni n celo število. Funkcija $e^{in\xi}\xi$ je povsod v končnem regularna in zavzame pri $\xi = 0$ vrednost 0. Element $e^{inu}u$ je neki element v B z normo $\|e^{inu}u\| = \|u\|$. V njegov spekter spada po izreku o preslikavi spektra ([3] ,str.693) število $e^{in(\alpha+i\beta)}(\alpha + i\beta)$ in mora torej biti

$$\left|e^{in(\alpha + i\beta)}(\alpha + i\beta)\right| = e^{-n\beta}\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \leq \|e^{inu}u\| = \|u\|$$

Pri primernem celem številu n, ki je še na razpolago,je pa gotovo $e^{-n\beta}\sqrt{\alpha^2+\beta^2} > \|u\|$, kar je v protislovju s prejšnjo neenačbo. Mora tedaj biti $\beta = 0$.

Iz lastnosti a), b), d) stavka 2 še sledi, da tvori množica H realen Banachov prostor.

V 2c) smo zahtevali, da v algebri B naj ne bo nobenega elementa $x \neq \Theta$, za katerega bi bil produkt $xy = \Theta$ za vse $y \in B$. Navedimo preprost zgled algebre, ki nima te lastnosti. Naj bosta a, b fiksna linearno neodvisna elementa. Vrednosti njunih produktov definiramo z multiplikacijsko tabelo

	a	b
a	a	b
b	a	b

V množici M vseh elementov oblike $\alpha a + \beta b$, $\alpha, \beta \in Z$, seštevajmo in množimo elemente v skladu z zgornjim predpisom na sicer običajen način. Če je torej $\gamma, \delta \in Z$, je

$$(\alpha a + \beta b) + (\gamma a + \delta b) = (\alpha + \gamma)a + (\beta + \delta)b$$

$$(\alpha a + \beta b)(\gamma a + \delta b) = (\alpha\gamma + \beta\gamma)a + (\alpha\delta + \beta\delta)b = (\alpha + \beta).$$
$$.(\gamma a + \delta b)$$

Ako še postavimo $\|\alpha a + \beta b\| = |\alpha| + |\beta|$, se hitro vidi, da je množica M Banachova algebra brez enote. Če je namreč $\{x_n\} = \{\alpha_n a + \beta_n b\}$ Cauchyjevo zaporedje elementov iz M, je za vsak $\varepsilon > 0$ pri vseh dovolj velikih indeksih n,m $|\alpha_n - \alpha_m| + |\beta_n - \beta_m| < \varepsilon$ in torej eksistirata $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha_0$, $\lim_{n\to\infty} \beta_n = \beta_0$. Potem pa velja $\alpha_n a + \beta_n b \longrightarrow \alpha_0 a + \beta_0 b$ in $\alpha_0 a + \beta_0 b \in M$. Očitno je tudi, da je $x = \gamma a$ edini element iz M, za katerega je $xa = ax$. Če bi torej bila v M enota, bi moral biti to element γa, $\gamma \neq 0$. Ta možnost je pa takoj ovržena, ker b ni enak a in je $\gamma ba = \gamma a$.

Za $\lambda \in Z$, $\lambda \neq 0$, je $\lambda(a - b) \in M$ in $\lambda(a - b) \neq \Theta$. Nadalje je pa $\lambda(a - b)(\alpha a + \beta b) = \lambda(\alpha a - \alpha a + \beta b - \beta b) = \Theta$ za vsak element $\alpha a + \beta b \in M$. Ker je

$$\|x + i\xi ux\| = \|\gamma a + \delta b + i\xi(\alpha a + \beta b)(\gamma a + \delta b)\| =$$

$$= \|\gamma a + \delta b + i\xi(\alpha+\beta)(\gamma a + \delta b)\| = (|\gamma| + |\delta|)\,|1 + i\xi(\alpha+\beta)|$$

so sebi adjungirani tisti elementi, pri katerih je $\alpha+\beta$ realno število. Zato je $i(a-b)\in H$, $i(a-b)\neq\Theta$, $-a+b\neq\Theta$ in $i(a-b)+i(-a+b)=\Theta$.

Stavek 3. Če je Banachova algebra B takšna, da za noben element $x\neq\Theta$ ni $xy=\Theta$ za vse $y\in B$ in je $[\lambda,\varkappa]$, $\lambda\leq\varkappa$, najmanjši interval realne osi, na katerem leži spekter elementa $u\in H$, eksistirata takšni števili $L\leq\lambda$, $K\geq\varkappa$, da je za vsak $\xi\geq 0$

$$\sup\|e^{\xi u}x\| = e^{K\xi} \quad \text{in} \quad \sup\|e^{-\xi u}x\| = e^{-L\xi}$$

Supremum je pri tem mišljen glede na vse elemente $x\in B$ z normo $\|x\|=1$.

Dokaz. Za vsak $u\in H$, $x\in B$ z normo $\|x\|=1$ in $\xi\geq 0$ je $e^{\xi u}x$ element iz B in mu zato pripada kot norma neko nenegativno število. Če sta u in ξ fiksna, x pa preteče vso kroglo $\|x\|=1$ iz B, opiše $e^{\xi u}x$ neko množico elementov iz B, katerih norme tvorijo neko množico nenegativnih števil. Zaradi ocene $\|e^{\xi u}x\|\leq e^{\xi\|u\|}$ je ta množica navzgor omejena in ji torej pripada končna natančna zgornja meja $\sup\|e^{\xi u}x\|$. Tako je pri izbranem $u\in H$ definirana za $\xi\geq 0$ končna realna funkcija $f(\xi)=\sup\|e^{\xi u}x\|$. Vsakemu $u\in H$ pripada neka funkcija $f(\xi)$.

Iz same definicije se vidi, da funkcija $f(\xi)$ ni nikdar negativna. Pa tudi vrednosti 0 pri nobenem končnem ξ ne zavzame. Iz $1 = \|e^{-\xi u}e^{\xi u}x\| \leq \|e^{\xi u}x\| e^{\xi\|u\|}$ sledi namreč za vsak končen ξ neenačba $0 < e^{-\xi\|u\|} \leq f(\xi)$.

Naj bo $e^{\eta u}x/\|e^{\eta u}x\| = y$ in η nenegativno realno število. Potem je $\|y\| = 1$ in

$$\|e^{(\xi+\eta)u}x\| = \|e^{\xi u}y\| \, \|e^{\eta u}x\|$$

ter naprej

$$\sup\|e^{(\xi+\eta)u}x\| = \sup(\|e^{\xi u}y\| \, \|e^{\eta u}x\|) \leq \sup\|e^{\xi u}y\| \sup\|e^{\eta u}x\|$$

Funkcija $f(\xi)$ ustreza torej pri $\xi, \eta \geq 0$ pogoju

$$f(\xi+\eta) \leq f(\xi).f(\eta) \qquad (4)$$

Ker je povsod $f(\xi) > 0$, je funkcija $g(\xi) = \log f(\xi)$ vedno realna, končna in zaradi (4) subaditivna. Zato obstaja ([3], str.244)

$$\lim_{\xi\to\infty} g(\xi)/\xi = \inf_{\xi>0} g(\xi)/\xi = K \qquad (5)$$

Videli smo že, da je $e^{-\xi\|u\|} \leq f(\xi) \leq e^{\xi\|u\|}$. Od tod sledi $-\|u\| \leq K \leq \|u\|$. Iz (5) pa se dobi $g(\xi) \geq K\xi$ ali

$$f(\xi) \geq e^{K\xi} \qquad (6)$$

Za izpeljavo nasprotne ocene si oglejmo funkcijo $F(\zeta) = e^{-K\zeta}e^{\zeta u}x$, $\zeta = \xi + i\eta$, (ξ, η realni števili), $u \in H$, $x \in B$, $\|x\| = 1$. Z njo je pri danih elementih u in x prirejen vsakemu kompleksnemu številu ζ neki element iz algebre B z normo

$$\|F(\zeta)\| = \|e^{-K\zeta}e^{\zeta u}x\| \leq e^{(|K| + \|u\|)|\zeta|} \tag{7}$$

Če je ζ čisto imaginarno število, je

$$\|F(i\eta)\| = \|e^{iK\eta}e^{i\eta u}x\| = |e^{iK\eta}| \, \|e^{i\eta u}x\| = \|x\| = 1 \tag{8}$$

Iz (5) sklepamo nadalje, da je možno za vsako število $\omega > 0$ najti takšen $\xi_0 > 0$, da je pri vseh $\xi > \xi_0$

$$e^{(K-\omega)\xi} \leq f(\xi) \leq e^{(K+\omega)\xi} \tag{9}$$

Naj bo zdaj predpisan poljuben $\varepsilon > 0$. Potem je še vedno mogoče izbrati $\omega > 0$ tako, da je $\varepsilon > \omega > 0$. Element $F(\xi)e^{-\varepsilon\xi}$ je v B. Za njegovo normo velja po (9) za vse $\xi > \xi_0$

$$\|F(\xi)e^{-\varepsilon\xi}\| = \|e^{(-K-\varepsilon)\xi}e^{\xi u}x\| = \|e^{-(K+\varepsilon)\xi}e^{\xi u}x\| \leq$$
$$\leq e^{-(K+\varepsilon)\xi}e^{(K+\omega)\xi} = e^{-(\varepsilon-\omega)\xi}$$

Norma tega elementa gre torej proti 0, ko narašča $\xi \to \infty$. Potem je pa

$$\overline{\lim_{|\zeta|\to\infty}}(1/|\zeta|)\log\|F(\zeta)\| = \overline{\lim_{|\xi|\to\infty}}(1/|\xi|)\log\|F(\xi)\| \leq \overline{\lim_{\xi\to\infty}}(1/\xi)\log\|F(\xi)\| =$$

$$= \overline{\lim_{\xi \to \infty}}(1/\xi)(\varepsilon\xi + \log\|F(\xi)e^{-\varepsilon\xi}\|) = \varepsilon + \overline{\lim_{\xi\to\infty}}(1/\xi)\log\|F(\xi)e^{-\varepsilon\xi}\|$$

Drugi sumand je pa ≤ 0, ker velja $\|F(\xi)e^{-\varepsilon\xi}\| \to 0$ pri $\xi \to \infty$. Ker je pa $\varepsilon > 0$ še poljuben, sledi

$$\overline{\lim_{|\xi|\to\infty}}(1/|\xi|)\log\|F(\xi)\| \leq 0 \qquad (10)$$

(7), (8) in (10) kažejo, da izpolnjuje funkcija $F(\zeta)$ zahteve posplošenega Polya-Szegöjevega izreka ([11] ,str.147), po katerem je $\|F(\zeta)\| \leq 1$ za vsak $\zeta = \xi + i\eta$, ξ, η realna, $\xi \geq 0$. Toda pogoji (7), (8), (10) so izpolnjeni za vsak $x \in B$, $\|x\| = 1$, tako da velja pri $\xi \geq 0$ za vse funkcije $F(\xi)$ ocena $\|F(\xi)\| \leq 1$. Potem je pa tudi $\sup\|F(\xi)\| \leq 1$ za $\xi \geq 0$. Posebej je tedaj

$$\sup\|F(\xi)\| = \sup\|e^{-K\xi}e^{\xi u}x\| \leq 1$$

ali $f(\xi) \leq e^{K\xi}$, $\xi \geq 0$. Ta in pa neenačba (6) dasta skupaj

$$f(\xi) = \sup\|e^{\xi u}x\| = e^{K\xi}$$

za vsak $\xi \geq 0$.

Obenem z elementom u je po stavku 2 v množici H tudi element -u. Zato eksistira zanj

$$-\lim_{\xi\to\infty} g(\xi)/\xi = L$$

in velja torej izražava

$$\sup \|e^{\xi(-u)}x\| = \sup \|e^{-\xi u}x\| = e^{-L\xi}$$

za vsak $\xi \geq 0$.

Ako pomeni $\tau = \max(K, -L)$, drži za vsak $\xi \in Z$ ocena

$\sup \|e^{\xi u}x\| \leq e^{\tau|\xi|}$ in naprej $\overline{\lim\limits_{|\xi|\to\infty}}(\log \sup \|e^{\xi u}x\| / |\xi|) = \tau$.

Trdimo, da je $\tau \geq \|u\|_{sp} = \lim\limits_{n\to\infty} \|u^n\|^{1/n}$ (spektralni radij elementa u). Če je namreč število $\varrho > K$, je zaradi ocene $\|e^{\xi u}u\| \leq e^{K\xi}\|u\|$ integral $-\int\limits_0^\infty e^{-\xi\varrho} e^{\xi u} u d\xi$ absolutno konvergenten in torej definira v algebri B neki element c. Od tod pa takoj sledi, da je $K \geq 0$. V nasprotnem primeru bi namreč bil v B element $x_0 = -\int\limits_0^\infty e^{\xi u} u d\xi$. Za vsak element x iz B bi tedaj veljalo

$$x_0 x = -\int\limits_0^\infty e^{\xi u} u x d\xi = -\int\limits_0^\infty \frac{d}{d\xi}(e^{\xi u}x) d\xi = \Big[-e^{\xi u}x\Big]_0^\infty = x$$

Zaradi ocene $\lim\limits_{\xi\to\infty} \|xe^{\xi u}y\| \leq \lim\limits_{\xi\to\infty} \|x\|\,\|y\|\,e^{K\xi} = 0$, ki bi držala za vsak x in y iz B, bi pa dobili $\lim\limits_{\xi\to\infty} xe^{\xi u} = \Theta$ in zato tudi ?

$$xx_0 = -\int\limits_0^\infty xe^{\xi u} u d\xi = \Big[-xe^{\xi u}\Big]_0^\infty = x$$

Element x_0 bi torej bil enota v B. Ker algebra B ne vsebuje enote, torej pri nobenem sebi adjungiranem elementu u ni $K < 0$. Z upoštevanjem krepkega odvoda integranda v definiciji za c

$$\frac{d}{d\xi}\left(e^{-\xi\rho}e^{\xi u}u\right) = -e^{-\xi\rho}e^{\xi u}(\rho u - u^2)$$

se dobi

$$u + \rho c - uc = u - \int_0^\infty e^{-\xi\rho}e^{\xi u}(\rho u - u^2)d\xi = u + \left[e^{-\xi\rho}e^{\xi u}u\right]_0^\infty = \Theta$$

Zaradi zamenljivosti elementov u, c je tudi $u + \rho c - cu = \Theta$. Element c je potemtakem kvaziinverzni k elementu $(1/\rho)u$. Vse točke $\rho > K$ na realni osi so torej regularne za element u.

Naj bo zdaj $\rho < L$. Kakor ravnokar, ugotovimo obstoj elementa $c_1 = \int_0^\infty e^{\xi\rho} e^{\xi(-u)}u d\xi$ in doženemo, da je $L \leqq 0$ ter da je c_1 kvaziinverzni element k elementu $(1/\rho)u$. Torej so tudi vse točke $\rho < L$ realne osi regularne za element u. Ker je pa spekter elementa u realen, leži med L in K in interval $(\lambda, \varkappa)$ ne seže preko intervala (L,K). Zato je $\tau \geqq \|u\|_{sp}$ in $L \leqq \lambda$, $K \geqq \varkappa$. S tem je stavek 3 dokazan. Če A nima leve enote ali pa če ima dvostransko enoto.

Če je $K = L$, je v spektru elementa u samo število 0. V tem primeru je $\|e^{\xi u}x\| / \|x\| \leqq 1$ za vsak realen ξ in $\|e^{\xi u}x\| / \|x\| = \|e^{i\eta u}e^{\xi u}x\| / \|x\| \leqq 1$ za vsak kompleksen ξ. Po Liouvillovem izreku sledi $e^{\xi u}x = x$ za vsak ξ in x pri tem u. To je mogoče le za $u = \Theta$. V algebri B je torej Θ edini element, za katerega je $K = L = 0$.

Imenujmo B_1 algebro, ki jo dobimo, ko privzamemo k algebri B enoto 1. V naslednjem stavku naj pomeni H_1 množico sebi adjungiranih elementov v B_1.

Stavek 4. Če ima Banachova algebra B lastnosti

1) za noben $x \in B$, $x \neq \Theta$ ni $xy = \Theta$ za vse $y \in B$

2) vsak element $x \in B$ se izraža z vsoto $x = h + ig, h, g \in H$

3) $H \subset H_1$

in je $[\lambda, \varkappa]$, $\lambda \leqq \varkappa$, najmanjši interval realne osi, ki vsebuje spekter elementa $u \in H$, je za vse $\xi \geqq 0$

$$\sup \| e^{\xi u} x \| = e^{\varkappa \xi} \quad \text{in} \quad \sup \| e^{-\xi u} x \| = e^{-\lambda \xi}$$

Supremum je pri tem mišljen glede na vse elemente $x \in B$ z normo $\|x\| = 1$.

Dokaz. Iz stavka 3 sledi, da je $\tau = \max(K, -L) \geqq \|u\|_{sp}$. Dokazati pa moremo tudi oceno $\tau \leqq \|u\|_{sp}$. V ta namen privzemimo k algebri B enoto 1 in imenujmo razširjeno algebro B_1. Kakor je znano, ima vsak element iz B_1 obliko $\alpha . 1 + x = \alpha + x$; pri tem je $\alpha \in Z$, $x \in B$ in 1 enota v B_1. Vse možne vsote $\alpha + x$ dajo vse elemente iz B_1. Seštevanje, skalarno množenje in množenje je definirano v B_1 takole

$$(\alpha + x) + (\beta + y) = (\alpha + \beta) + (x + y) \qquad \alpha, \beta \in Z;\ x, y \in B$$

$$\alpha(\beta + x) = (\alpha\beta) + \alpha x$$

$$(\alpha + x)(\beta + y) = (\alpha\beta) + (\beta x + \alpha y + xy)$$

Te operacije imajo vse na str. 1 omenjene algebrajske lastnosti (komutativnost vsote, asociativnost produkta, itd.). To sledi od tod, ker imata množica kompleksnih števil Z in pa algebra B te lastnosti.

V algebri B_1 je treba vpeljati še normo. Od norme v B jo bomo razlikovali po indeksu. Torej pomeni $\|.\|_1$ normo v B_1, $\|.\|$ pa normo v B. Za element $\alpha + x \in B_1$ naj bo

$$\|\alpha + x\|_1 = \sup \|\alpha y + xy\|, \; y \in B, \; \|y\| = 1 \qquad (11)$$

Da je s tem predpisom res prirejeno vsakemu elementu $\alpha + x \in B_1$ neko nenegativno število, kaže ocena $\|\alpha y + xy\| \leq \leq |\alpha| + \|x\|$, ki velja za vsak $y \in B$, $\|y\| = 1$. Prepričati pa se še moramo, da je (11) prava norma. Zato je treba preveriti, ali so izpolnjene vse zahteve, ki jim mora norma ustrezati.

Očitno je $\|1\|_1 = 1$. Naj bosta $z_1 = \alpha_1 + x_1, z_2 = \alpha_2 + x_2$ poljubna elementa iz B_1 in $\beta \in Z$. Potem velja

$$\|\beta z_1\|_1 = \sup \|\beta(\alpha_1 y + x_1 y)\| = |\beta| \sup \|\alpha_1 y + x_1 y\| = |\beta| \|z_1\|_1$$

$$\|z_1 + z_2\|_1 = \sup \|(\alpha_1 + \alpha_2)y + (x_1 + x_2)y\| \leq \sup(\|\alpha_1 y +$$

$$+ x_1 y\| + \|\alpha_2 y + x_2 y\|) \leq \|z_1\|_1 + \|z_2\|_1$$

Če pišemo $(\alpha_2 y + x_2 y)/ \|\alpha_2 y + x_2 y\| = y_1 \in B$, je nadalje

$$\|z_1 z_2\|_1 = \sup \|(\alpha_1 + x_1)(\alpha_2 + x_2)y\| = \sup(\|\alpha_1 y_1 +$$

$$+ x_1 y_1\| \, \|\alpha_2 y + x_2 y\|) \leq \sup \|\alpha_1 y_1 + x_1 y_1\| . \sup \|\alpha_2 y + x_2 y\| =$$

$$= \|z_1\|_1 \|z_2\|_1$$

Poglejmo še, ali je Θ edini element v B_1 z normo 0. Vzemimo, da bi bil n.pr. tudi element $\lambda - c \in B_1$, $\lambda \in Z$, $\lambda \neq 0$, $c \in B$ takšen. Zaradi linearne neodvisnosti elementov 1, c, za noben $\lambda \neq 0$ in $c \in B$ ni $\lambda - c = \Theta$. Pišimo $(1/\lambda)c = d$. Ker iz

$$\|\lambda - c\|_1 = |\lambda| \, \|1 - d\|_1 = |\lambda| \sup \|y - dy\| = 0, \qquad y \in B, \ \|y\| = 1$$

sledi $\|y - dy\| = 0$ oz. $y = dy$ za vsak $y \in B$, pomeni to, da je $d = (1/\lambda)c \in B$ leva enota v B. Element d je pa tudi sebi adjungiran, saj je

$$\|x + i\xi dx\| = \|x + i\xi x\| = \|x\| \sqrt{1 + \xi^2} = \|x\| + o(\xi)$$

za vsak $x \in B$. Ako je torej $u \in H$, je $i(du - ud) = i(u - ud) \in H$. Element $u - ud$ pa izpolnjuje pogoj (1)

$$\|x + i\xi(u - ud)x\| = \|x + \Theta\| = \|x\|$$

in spada torej v H. Oba elementa $i(u - ud)$ in $(u - ud)$ pa sta po stavku 2 lahko obenem v H le, ako je $u - ud = \Theta$ ali $u = ud$. To pa pomeni, da je d enota za elemente iz H. Če zdaj še upoštevamo izražavo elementov iz B z elementi iz H, je za vsak $x \in B$

$$dx = x, \quad xd = (h + ig)d = hd + igd = h + ig = x$$

Element d bi torej bil enota v B. Ker algebra B nima enote, je res $\|z\|_1 = 0$ le za $z = 0$.

Predpis (11) torej definira v B_1 pravo normo. Element $e^u = 1 + u + (1/2!)u^2 + (1/3!)u^3 + \ldots$ je v B_1. Iz same definicije spektra v algebri B sledi, da ima element u v B in v B_1 isti spekter in je tedaj $\|u\|_{sp} = \|u\|_{1sp}$. Funkcija e^ξ je regularna na spektru elementa u; zato dobimo spekter elementa e^u tako, da preslikamo spekter elementa u s funkcijo e^ξ. Tedaj je pa

$$\|e^u\|_{1sp} \leqq e^{\|u\|_{sp}} \qquad \|e^{-u}\|_{1sp} \leqq e^{\|u\|_{sp}}$$

Leve strani v teh ocenah pa se po stavku 3 glase

$$\|e^u\|_{1sp} = \lim_{n\to\infty}\|e^{nu}\|_1^{1/n} = \lim_{n\to\infty}(\sup_{\substack{x\in b\\ \|x\|=1}}\|e^{nu}x\|)^{1/n} = \lim_{n\to\infty}(e^{nK})^{1/n} = e^K$$

$$\|e^{-u}\|_{1sp} = \lim_{n\to\infty}\|e^{-nu}\|_1^{1/n} = \lim_{n\to\infty}(\sup_{\substack{x\in b\\ \|x\|=1}}\|e^{-nu}x\|)^{1/n} = \lim_{n\to\infty}(e^{-nL})^{1/n} = e^{-L}$$

Če to upoštevamo, imamo $\tau = \max(K, -L) \leqq \|u\|_{sp}$.

Zdaj vemo, da je $\tau = \|u\|_{sp} = \max(K,-L)$ in $L \leqq \lambda \leqq 0 \leqq K$. Element $u - L$ je v B_1, njegov spekter pa je obsežen v najmanjšem intervalu $(\lambda - L, \kappa - L)$. V množici H_1 sebi adjungiranih elementov v B_1 so vsi tisti elementi $a \in B_1$, za katere je $\|1 + i\xi a\|_1 = 1 + o(\xi)$ pri realnem $\xi \to 0$. Ker je $u \in H \subset H_1$ in $L \in H_1$, je tudi $u - L \in H_1$. Nadalje je element e^{u-L} v algebri B_1 in velja

$$\|e^{u-L}\|_1 = \|e^{-L}e^u\|_1 = \sup_{\substack{x\in b\\ \|x\|=1}}\|e^{-L}e^u x\| = e^{-L+K}$$

$$\|e^{-u+L}\|_1 = \|e^L e^{-u}\|_1 = \sup_{\substack{x \in B \\ \|x\| = 1}} \|e^L e^{-u} x\| = e^0$$

Večji od obeh eksponentov je pa spektralni radij elementa $u - L$. Tako dobimo $\|u - L\|_{1sp} = \max(\lambda - L, \varkappa - L) = \max(0, K - L)$. Zaradi $\lambda - L \leqq \varkappa - L$, $0 \leqq K - L$ pa od tod sledi $\varkappa - L = K - L$ ali $\varkappa = K$. Podoben postopek z elementom $u - K$ pokaže, da je $\lambda = L$. Stavek 4 je dokazan.

III

V tem razdelku bomo obravnavali Banachovo algebro B brez enote, ki ima tele lastnosti:

a''') Vsak element $x \in B$ je možno vsaj na en način izraziti v obliki $x = h + ig$, pri čemer je $h, g \in H$ in $i^2 = -1$.

b''') Ako spada h v množico H in je ξ realno število, velja $\|x + i\xi hx\| \leq \|x\| + o(\xi)$ za vsak $x \in B$ pri $\xi \to 0$.

c''') Za vsak $h \in H$ obstaja takšna razcepitev elementa $h^2 = u + iv$, $u, v \in H$, da je $uv = vu$.

d''') Za noben $x \in B$, $x \neq \Theta$, ni $xy = \Theta$ pri vseh $y \in B$.

Stavek 5. Vsaka Banachova algebra B z lastnostmi a'''), b'''), c'''), d''') je involutivna Banachova algebra.

Dokaz. Privzemimo k algebri B enoto. V razširjeni algebri B_1 je vsak element oblike $\alpha + x$, $\alpha \in Z$, $x \in B$, norma $\|\cdot\|_1$ je definirana s predpison (11). Seveda algebra B_1 v normi $\|\cdot\|_1$ v splošnem ni polna. Element $h \in H$ ima realen spekter, zato je realen tudi spekter elementa $h^2 \in B$. Ker se pri prehodu iz algebre B na algebro B_1 spekter elementov iz B ne spremeni, ima h^2 tudi v B_1 realen spekter. Funkcija $e^{i\xi^2}$ je povsod v končnem regularna, element $e^{ih^2} = 1 + (ih^2 - (1/2!)h^4 - \dots) \in B_1$, saj je zgoraj omenjene oblike. Spekter elementa e^{ih^2} leži torej na enotnem krogu kompleksne ravnine in je zato njegov spektralni radij $\|e^{ih^2}\|_{1sp} = 1$. Iz $h^2 = u + iv$, $u, v \in H$, $uv = vu$ pa sledi z upoštevanjem stavka 3

$$\|e^{ih^2}\|_{1sp} = \lim_{n\to\infty} \|e^{inh^2}\|_1^{\ 1/n} = \lim_{n\to\infty} \sup_{\substack{y\in B\\ \|y\|=1}} \|e^{inh^2}y\|^{\ 1/n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sup_{\substack{y\in B\\ \|y\|=1}} \|e^{-nv}y\|^{\ 1/n} = e^{-L}$$

in podobno

$$\|e^{-ih^2}\|_{1sp} = \lim_{n\to\infty} \sup_{\substack{y\in B\\ \|y\|=1}} \|e^{nv}y\|^{\ 1/n} = e^{K}$$

Torej je $K = L = 0$; to pa pomeni, da je $v = \Theta$ in $h^2 = u \in H$.

Vsak element $x \in B$ se da izraziti z vsoto $x = h + ig$, h, $g \in H$. Iz lastnosti d''') sledi, da je ta izražava enolična. Če je namreč tudi $x = h_1 + ig_1$, h_1, $g_1 \in H$, je $(h_1 - h) + i(g_1 - g) = \Theta$, $h_1 - h \in H$, $g_1 - g \in H$ in torej po stavku 2c) $h_1 - h = \Theta$, $g_1 - g = \Theta$. Zaradi tega je elementu $x = h + ig$ s predpisom $x^* = h - ig$ prirejen en sam element $x^* \in B$.

Takoj se vidi, da je $x^{**} = x$ in je torej zahteva a') izpolnjena.

Nadalje je pri $\lambda = \alpha + i\beta$, $\mu = \gamma + i\delta$, ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ realna števila), $x = h + ig$, $y = h_1 + ig_1$, $(h, g, h_1, g_1 \in H)$

$$(\lambda x + \mu y)^* = [\alpha h + \gamma h_1 - \beta g - \delta g_1 + i(\beta h + \delta h_1 + \alpha g + \gamma g_1)]^* =$$

$$= (\alpha h + \gamma h_1 - \beta g - \delta g_1) - i(\beta h + \delta h_1 + \alpha g + \gamma g_1) =$$

$$= (\alpha - i\beta)(h - ig) + (\gamma - i\delta)(h_1 - ig_1) = \bar{\lambda} x^* + \bar{\mu} y^*$$

To kaže, da je izpolnjena zahteva b').

Obenem z elementoma $h, h_1 \in H$ sta tudi elementa $hh_1 + h_1h = (h + h_1)^2 - h^2 - h_1^2 \in H$, $i(hh_1 - h_1h) \in H$. Ker pa so elementi iz H za operacijo * invariantni, je

$$(hh_1 + h_1h)^* = (hh_1)^* + (h_1h)^* = hh_1 + h_1h$$

$$(i(hh_1 - h_1h))^* = -i(hh_1)^* + i(h_1h)^* = ihh_1 - ih_1h$$

oziroma

$$(hh_1)^* + (h_1h)^* = hh_1 + h_1h$$

$$-(hh_1)^* + (h_1h)^* = hh_1 - h_1h$$

Če te dve enačbi seštejemo in odštejemo, dobimo $(h_1h)^* = hh_1$ in $(hh_1)^* = h_1h$. Potem pa se element $(xy)^*$ glasi

$$(xy)^* = \left[(h + ig)(h_1 + ig_1)\right]^* = \left[hh_1 - gg_1 + i(gh_1 + hg_1)\right]^* =$$
$$= (hh_1)^* - (gg_1)^* - i(gh_1)^* - i(hg_1)^* = h_1h - g_1g - i(h_1g+g_1h) =$$
$$= (h_1 - ig_1)(h - ig) = y^*x^*.$$

Torej je izpolnjena tudi zahteva c′).

<u>Stavek 6.</u> Če ima Banachova algebra B brez enote lastnosti a′′′), b′′′), c′′′), d′′′) in je norma $\|x\|_1 = \sup \|xy\|$, $y \in B$, $\|y\| = 1$, ekvivalentna prvotni normi $\|.\|$, je B popolnoma regularna Banachova algebra.

Dokaz. Privzemimo k algebri B enoto. V razširjeni algebri B_1 je vsak element oblike $\alpha + x$, $\alpha \in Z$, $x \in B$. Na str.28, 29 smo že tudi definirali operacije v B_1 in vpeljali normo $\|\cdot\|_1$ na način

$$\|\alpha + x\|_1 = \sup \|\alpha y + xy\|, \quad y \in B, \quad \|y\| = 1 \tag{11}$$

Tam smo tudi videli, da predpis (11) ustreza vsem zahtevam norme. Kar se tiče algebre B, sta v njej definirani dve normi, namreč prvotna $\|\cdot\|$ in nova $\|\cdot\|_1$. Po predpostavki sta normi $\|\cdot\|$ in $\|\cdot\|_1$ ekvivalentni in je zato algebra B polna tudi v normi $\|\cdot\|_1$. Od tod pa lahko na znani način ([2],str. 208) sklepamo, da je tudi algebra B_1 polna v normi $\|\cdot\|_1$.

Naj bo namreč $\{\alpha_n + x_n\}$, $\alpha_n \in Z$, $x_n \in B$, Cauchyjevo zaporedje iz B_1. Ker je vsako Cauchyjevo zaporedje omejeno, eksistira takšno pozitivno število A, da je $\|\alpha_n + x_n\|_1 < A$ za vsak indeks n. Od tod pa sledi, da mora biti zaporedje števil α_n omejeno. V nasprotnem primeru bi pač v zaporedju $\{\alpha_n\}$ eksistiralo podzaporedje $\{\alpha_{n'}\}$, $\alpha_{n'} \neq 0$, katerega členi bi po absolutni vrednosti naraščali preko vsake meje. Zato bi bilo pri $n' \to \infty$

$$\|1 + (1/\alpha_{n'})x_{n'}\|_1 = (1/|\alpha_{n'}|)\,\|\alpha_{n'} + x_{n'}\|_1 < A/|\alpha_{n'}| \to 0$$

ali $1 = \lim(-1/\alpha_{n'})x_{n'}$. Ker je pa $(1/\alpha_{n'})x_{n'} \in B$ in je algebra B polna, bi sledilo $1 \in B$. To protislovje kaže, da je $\{\alpha_n\}$ omejeno zaporedje. Potem pa so v njem konvergentna podzaporedja. Naj bo $\{\alpha_{n''}\}$ eno od njih z limito α_o. Za vsak $\varepsilon > 0$ je tedaj možno dobiti takšen indeks N, da je $|\alpha_{n''} - \alpha_{m''}| < \varepsilon$ pri n'', $m'' > N$. Ker je zaporedje $\{\alpha_{n''} + x_{n''}\}$ Cauchyjevo, lahko izberemo N tako, da je tudi

$$\|(\alpha_{n''} + x_{n''}) - (\alpha_{m''} + x_{m''})\|_1 < \varepsilon$$

pri n'', $m'' > N$. Tedaj je pa Cauchyjevo tudi zaporedje $\{x_{n''}\} = \{(\alpha_{n''} + x_{n''}) - \alpha_{n''}\} \in B$, saj ga lahko takole ocenimo

$$\|x_{n''} - x_{m''}\|_1 \leq \|(\alpha_{n''} + x_{n''}) - (\alpha_{m''} + x_{m''})\|_1 +$$
$$+ \|\alpha_{n''} - \alpha_{m''}\|_1 < 2\varepsilon ,$$

pri n'', $m'' > N$. Ker pa je v algebri B vsako Cauchyjevo zaporedje konvergentno, obstaja $\lim_{n'' \to \infty} x_{n''} = x_o \in B$. Iz izražave

$$x_o = \lim_{n'' \to \infty} x_{n''} = \lim_{n'' \to \infty} [(\alpha_{n''} + x_{n''}) - \alpha_{n''}] = \lim_{n'' \to \infty} (\alpha_{n''} + x_{n''}) - \alpha_o$$

sledi, da konvergira $\alpha_{n''} + x_{n''} \to \alpha_o + x_o \in B_1$. Element $\alpha_o + x_o$ je pa tudi limita prvotnega Cauchyjevega zaporedja $\{\alpha_n + x_n\}$, saj je pri vsakem $\varepsilon > 0$ za vse dovolj pozne indekse n in n''

$$\|\alpha_n + x_n - \alpha_o - x_o\|_1 \leq \|\alpha_n + x_n - \alpha_{n''} - x_{n''}\|_1 +$$
$$+ \|\alpha_{n''} + x_{n''} - \alpha_o - x_o\|_1 < 2\varepsilon$$

S tem je dokazana polnost algebre B_1 v normi $\|\cdot\|_1$.

Zaznamujmo s H_1 množico vseh sebi adjungiranih elementov iz B_1. To so vsi tisti elementi $u \in B_1$, za katere je

$$\|1 + i\xi u\|_1 \leqq 1 + o(\xi) \tag{12}$$

ko gre realno število $\xi \to 0$.

Pokažimo, da je $H \subset H_1$ in so torej v B sebi adjungirani elementi tudi še v B_1 sebi adjungirani. Naj bo $u \in H$. Tedaj je $\|y + i\xi uy\| = \|y\| + o(\xi)$ za vsak $y \in B$ in realen $\xi \to 0$. Funkcija $o(\xi)$ je v splošnem odvisna še od elementa y. Iz ocen

$$\|y\| + o(\xi) = \|y + i\xi uy\| = \|e^{i\xi u}y + (1/2!)\xi^2u^2y + (i/3!)\xi^3u^3y - \ldots\| \leqq \|y\| + \|y\|(1/2)\xi^2\|u\|^2e^{|\xi|\|u\|}$$

$$\|y\| + o(\xi) = \|y + i\xi uy\| = \|e^{i\xi u}y + (1/2!)\xi^2u^2y + (i/3!)\xi^3u^3y - \ldots\| \geqq \|y\| - \|y\|(1/2)\xi^2\|u\|^2e^{|\xi|\|u\|}$$

pa sledi, da je vedno $-\|y\|(1/2)\xi^2\|u\|^2e^{|\xi|\|u\|} \leqq o(\xi) \leqq \leqq \|y\|(1/2)\xi^2\|u\|^2e^{|\xi|\|u\|}$. Funkcije $o(\xi)$, pripadajoče elementom y iz B, ki imajo normo 1, torej po absolutni vrednosti ne presežejo funkcije $o_1(\xi) = (1/2)\xi^2\|u\|^2e^{|\xi|\|u\|}$. Če to upoštevamo, dobimo

$$\|1 + i\xi u\|_1 = \sup\|y + i\xi uy\| = \sup(1 + o(\xi)) \leqq \sup(1 + |o(\xi)|)$$
$$\leqq 1 + o_1(\xi),$$

saj je treba vzeti supremum glede na vse y iz B z normo 1. Po (12) pa to ravno pomeni $u \in H$. Ker je bil element $u \in H$ še poljuben, je torej $H \subset H_1$.

Ugotovimo pa lahko še tole: vsak element iz H_1 je oblike $k + g$, kjer pomeni k realno število in je $g \in H$.

Najprej sledi neposredno iz definicije množice H_1, da je $\alpha . 1 \in H_1$ tedaj in samo tedaj, kadar je α realno število. Nadalje pri $y \in B$, $y \bar{\in} H$, element y ni v H_1. Ker je $y = h + ig$, $h, g \in H \subset H_1$ in y ni iz množice H, je $g \neq \Theta$. Množica H_1 pa ima vse v stavku 2 omenjene lastnosti. Če bi tedaj element $y = h + ig$ bil v H_1, bi bil tam tudi element ig in bi iz $g \in H_1$, $ig \in H_1$ sledilo $g = \Theta$. To pa ni v skladu z obliko elementa y. Zdaj pa lahko doženemo, da tudi elementi oblike $\alpha + g$, kjer α ni realno število, $g \in H$, in elementi oblike $k + y$, kjer je k realno število, $y \bar{\in} H$, $y \in B$, niso v H_1. V nasprotnem primeru bi namreč veljalo $\alpha = (\alpha + g) - g \in H_1$, $y = (k + y) - k \in H_1$. Videli smo pa že, da to ni mogoče. Vzemimo zdaj poljuben element $\alpha + y$, katerega koeficient α ni realno število in je $y \in B$, $y \bar{\in} H$. Pisati moremo $\alpha = k_1 + ik_2$, pri čemer sta k_1, k_2 realni števili in je $k_2 \neq 0$, ker α ni realen. Za element y imamo izražavo $y = g_1 + ig_2$, g_1, $g_2 \in H$, tako da dobi element $\alpha + y$ obliko

$$\alpha + y = (k_1 + ik_2) + g_1 + ig_2 = (k_1 + g_1) + i(k_2 + g_2) \qquad (13)$$

Recimo, da bi veljalo $\alpha + y \in H_1$. Ker je $k_1 + g_1 \in H_1$, bi po (13) element $i(k_2 + g_2)$ spadal v H_1. Toda tudi element

$k_2 + g_2$ je v H_1 in zato mora biti $k_2 + g_2 = \Theta$ (stavek 2) oziroma $1 = -(1/k_2)g_2 \in H$. To pa je protislovje, saj je algebra B in torej tudi množica H brez enote.

Ni težko videti, da Banachova algebra B_1 z enoto ustreza zahtevam a''), b''), c''). V definiciji b'') nastopajoča množica je ravno H_1, to je skupnost elementov $k + g$, k realno število, $g \in H$.

Vsak element iz B_1 ima obliko $\alpha + x$, $\alpha \in Z$, $x \in B$. Zaradi a''') je $x = h + ig$, $h, g \in H$, tako da je $\alpha + x = (k_1 + h) + i(k_2 + g)$; tu sta k_1, k_2 realni števili in je zato $k_1 + h \in H_1$, $k_2 + g \in H_1$. To kaže, da je izpolnjena v B_1 zahteva a'').

Ker je vsak element h_1 iz H_1 oblike $h_1 = k + g$, k realno število, $g \in H$, je $h_1^2 = k^2 + 2kg + g^2$. Tu pa je $k^2 + 2kg \in H_1$ in $g^2 \in H \subset H_1$, tako da je pogoj c'') izpolnjen sam po sebi pri $u = h_1^2$, $v = \Theta$. V dokazu stavka 5 smo namreč ugotovili, da je obenem z $g \in H$ tudi $g^2 \in H$.

Po [9] je algebra B_1 popolnoma regularna. Involucijo definira kar prehod od elementa $x = h + ig$, $h, g \in H_1$, na element $x^* = h - ig$. Če uvedemo v B_1 normi $\|\cdot\|_1$ ekvivalentno normo $\|x\|_0 = \sqrt{\|x^* x\|_1}$, je $\|x^* x\|_0 = \|x\|_0^2$, $x \in B_1$. S tem je pa tudi na elementih algebre B definirana popolnoma regularna involucija. Iz a''') in ekvivalence norm $\|\cdot\|$ in $\|\cdot\|_1$ v B pa vidimo, da prireja tako definirana popolnoma regularna involucija elementom iz B le elemente iz B. Stavek 6 je dokazan.

Stavek 7. Vsaka končnodimenzionalna algebra B z lastnostmi a'''), b'''), c'''), d''') je popolnoma regularna Banachova algebra.

Dokaz. Ker vsebuje algebra B samo končno mnogo linearno neodvisnih elementov, je v normi $\|.\|_1$ tudi polna. Nadalje je za vsak $x \in B$ $\|x\|_1 \leq \|x\|$. Zato sta normi $\|.\|$, $\|.\|_1$ ekvivalentni ([3] ,str.47) in torej po stavku 6 eksistira v B popolnoma regularna involucija.

IV

V stavku 6 je dokazana tale trditev:

Naj bo H podmnožica Banachove algebre B brez enote, ustrezajoča pogojem:

a''') Vsak element $x \in B$ je možno vsaj na en način izraziti v obliki $x = h + ig$, pri čemer je $h, g \in H$ in $i^2 = -1$.

b''') Ako spada h v množico H in je ξ realno število, velja $\|x + i\xi hx\| \leq \|x\| + o(\xi)$ za vsak $x \in B$ pri $\xi \to 0$.

c''') Za vsak $h \in H$ obstaja takšna razcepitev elementa $h^2 = u + iv$, $u, v \in H$, da je $uv = vu$.

d''') Za noben $x \in B$, $x \neq \theta$, ni $xy = \theta$ pri vseh $y \in B$.

e''') Norma $\|x\|_1 = \sup \|xy\|$, $y \in B$, $\|y\| = 1$, je ekvivalentna normi $\|x\|$.

Potem je:

1) Razcepitev $x = h + ig$, $h, g \in H$, je enolična za vsak $x \in B$.

2) Preslikava $x \to x^*$, ki prireja elementu $x = h + ig$ element $x^* = h - ig$, je v B involucija.

3) Norma $\|x\|_0 = \|x^*x\|_1^{1/2}$ je v B ekvivalentna prvotni normi $\|x\|$ in je $\|x^*x\|_0 = \|x\|_0^2$.

Lastnosti a'''), b'''), c'''), d'''), e''') so torej zadostne zato, da je Banachova algebra brez enote popolnoma regularna Banachova algebra. Omenili smo že, da so za Banachovo algebro z enoto v ta namen po [9] zadostni že pogoji a''), b''), c''). Rahla posplošitev le-teh so pogoji a'''), b'''), c'''). Čisto na novo pa sta se pojavila pogoja d''') in e'''). Postavlja se vprašanje, ali morda ne bi mogli dokazati popolne regularnosti Banachove algebre brez enote samo na podlagi a'''), b'''), c'''). Kaj takega pa je težko pričakovati, ker sta pogoja d''') in e''') v Banachovi algebri z enoto vedno izpolnjena in torej sama po sebi vsebovana v sistemu a''), b''), c'').

Pogoj d''') zagotavlja enoličnost izražave $x = h + ig$ elementov $x \in B$ z elementi $h, g \in H$. Če ga opustimo, ta izražava ni več nujno enolična. Ker tvorijo vsi elementi $x \in B$, za katere je $xy = \Theta$ za vsak $y \in B$, zaprt dvostranski ideal J, je faktorski prostor B/J Banachova algebra, ki izpolnjuje d'''). V B/J je torej razcepitev vedno enolična.

Če opustimo pogoj e'''), algebra B v normi $\|.\|_1$ vobče ni več polna. Involucija se v B sicer da vpeljati (stavek 5) in norma $\|x\|_0 = \|x^x x\|_1^{1/2}$ je tudi popolnoma regularna; seveda pa v splošnem tudi v tej normi algebra B ni več polna.

L i t e r a t u r a

[1] L.H. Loomis: An introduction to abstract harmonic analysis. New York 1953.

[2] M.A. Neumark: Normirovannye kolca. Moskva 1956.

[3] E. Hille, R.S. Phillips: Functional Analysis and Semi-groups.Amer. Math. Coll. Publ. Vol.31 (1957)

[4] v. Neumann J: Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der normalen Operatoren.Math. Ann.102 (1929).

[5] Murray F.J.,v. Neumann J:
On rings of operators I Ann. Math. 37
" " " II Trans. Math. Soc. 41
" " " IV Ann. Math. 44

[6] I.M. Gelfand: Normierte Ringe. Mat. sb. 9 (1941)

[7] I. Gelfand and M. Neumark: On the imbedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space, Mat. sb. 12 (1943)

[8] Schatz,J.A.: Math. Reviews 14, 884 (1953) (poročilo o neki razpravi Fukamye).

[9] Vidav,I: Eine metrische Kennzeichnung der selbstadjungierten Operatoren. Math. Zeitschr.Bd.66 (1956)

[10] Vidav,I.: Quelques propriétés de la norme dans les algèbres de Banach.Académie serbe des sciences. Publications de l'institut mathématique T.X. 1956.

[11] Polya G.-G. Szegö: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I. Die Grundlehren der Math.Wiss.,Bd.XIX 1925.

[12] V.I. Smirnov: Kurs vyššej matematiki.Tom V. Moskva 1959.