# Napoleonov problem

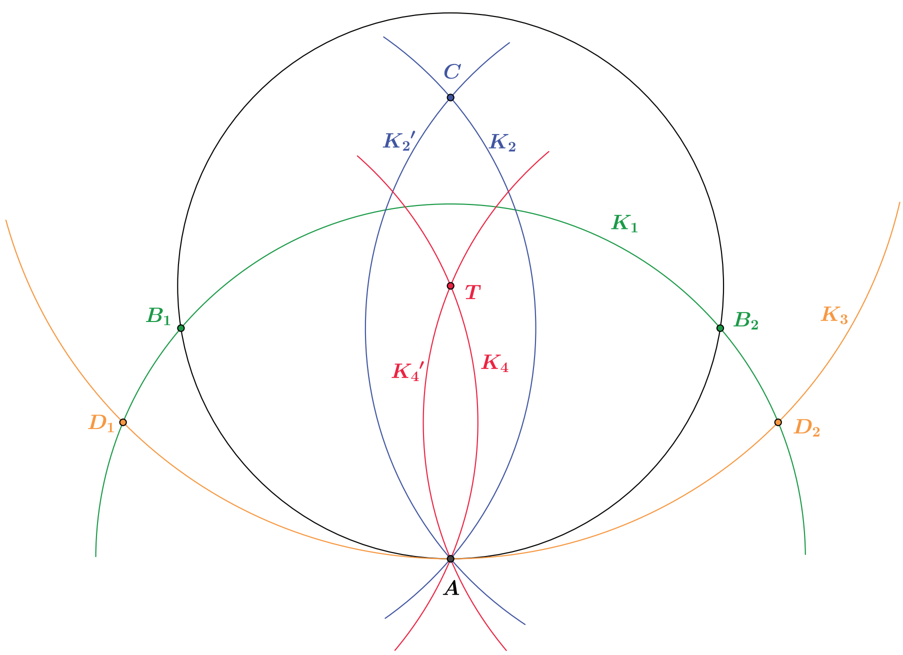
↓↓↓
Mateja Čarman

→ **Ukvarjali se bomo s konstrukcijskim problemom. Podano imamo krožnico (brez središča). Naša naloga je, da samo z uporabo šestila razdelimo krožnico na štiri enake dele. To je ekvivalentno problemu, da v dano krožnico včrtamo kvadrat. Nalogo bomo razdelili na dva dela. V prvem delu bomo konstruirali središče dane krožnice, v drugem delu pa bomo krožnici s podanim središčem včrtali kvadrat. Drugi del problema je znan tudi kot Napoleonov problem. Sicer ni povsem znano, ali je problem res postavil on, tudi ni jasno, ali je ta problem sploh rešil.**

## Prvi del. Konstrukcija središča danega kroga s šestilom

### Potek konstrukcije

Na krožnici si izberemo poljubno točko $A$ (glej sliko 1). Narišemo krožnico $K_1$ s središčem v $A$ in poljubnim polmerom, večjim od polmera dane krožnice in manjšim od premera. Presečišči krožnice $K_1$ z dano krožnico označimo z $B_1$ in $B_2$. Narišemo $K_2(B_1, |AB_1|)$ in $K_2'(B_2, |AB_2|)$, ki se sekata v točki $C$. V nadaljevanju narišemo krožnico $K_3$ s središčem v $C$ in polmerom $|AC|$. Presečišči krožnic $K_3$ in $K_1$ označimo z $D_1$ in $D_2$. Nazadnje narišemo še krožnici $K_4(D_1, |AD_1|)$ in $K_4'(D_2, |AD_2|)$. Trdimo, da je njuno presečišče $T$ središče prvotnega kroga.




**SLIKA 1.**
Konstrukcija središča kroga s šestilom

### Dokaz

Naj bo $S$ središče kroga (te točke sicer še ne znamo skonstruirati). Naš cilj je dokazati, da je $T = S$, torej, da je $T$ središče prvotne krožnice. Dokaz bo potekal v dveh delih.

Najprej si poglejmo le krožnice $K_1$, $K_2$ in $K_2'$ (glej sliko 2). Predpostavimo, da središča krožnice že poznamo. Razdalja $|AS| = r$ je ravno polmer dane krožnice, dolžino $|AB_2|$ označimo z $b$, kot $B_2AS$ pa z $\alpha$. Točka $B_2$ leži na prvotni krožnici, zato je $|SB_2| = r$, točki $C$ in $A$ pa ležita na krožnici $K_2'$, zato je $|B_2C| = |B_2A| = b$. Trikotnik $AB_2S$ je enakokrak, zato je $\angle AB_2S = \alpha$, prav tako je trikotnik $AB_2C$ enakokrak in zato je $\angle B_2CA = \alpha$. Zaradi podobnosti trikotnikov $AB_2S$ in $CAB_2$ velja razmerje

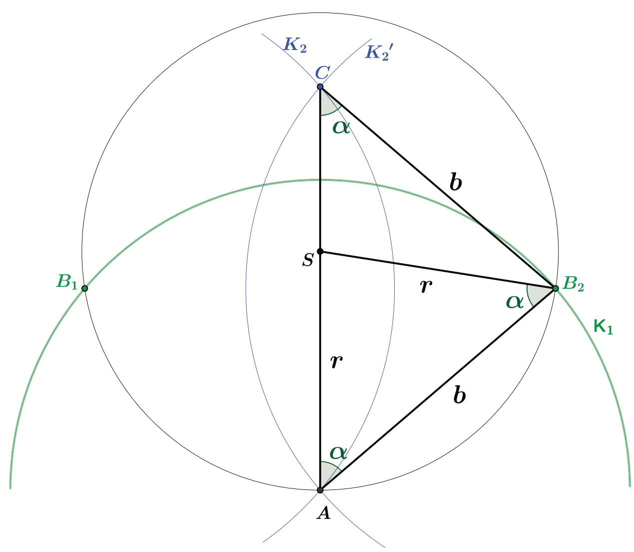
- $|AB_2| : |AS| = |AC| : |CB_2|$,

od koder sledi

- $|AC| = \dfrac{|AB_2||CB_2|}{|AS|}$.

Zapisano z našimi oznakami dobimo

- $|AC| = \dfrac{b^2}{r}$.




**SLIKA 2.**
Prvi del dokaza

V drugem delu dokaza si bomo ogledali še krožnice $K_3$, $K_4$ in $K_4'$ (glej sliko 3). Velja $|AD_2| = b$, saj točka $D_2$ leži na krožnici $K_1$ tako kot točka $B_2$. Točki $A$ in $D_2$ ležita na krožnici $K_4$, katere središče je $C$, zato velja $|AC| = |CD_2|$. Označimo kot $D_2AT$ z $\beta$. Zaradi enakokrakih trikotnikov velja analogno kot v prvem delu $\angle D_2AT = \angle AD_2C = \angle ATD_2 = \beta$ ter podobnost trikotnikov $AD_2T$ in $D_2CA$. Torej velja razmerje

- $|AT| : |AD_2| = |AD_2| : |CD_2|$.

Izrazimo $|AT|$:

- $|AT| = \dfrac{|AD_2||AD_2|}{|CD_2|}$.

Namesto $|AD_2|$ pišimo $b$, namesto $|CD_2|$ pa $|AC|$ in vstavimo rezultat prvega dela. Dobimo:

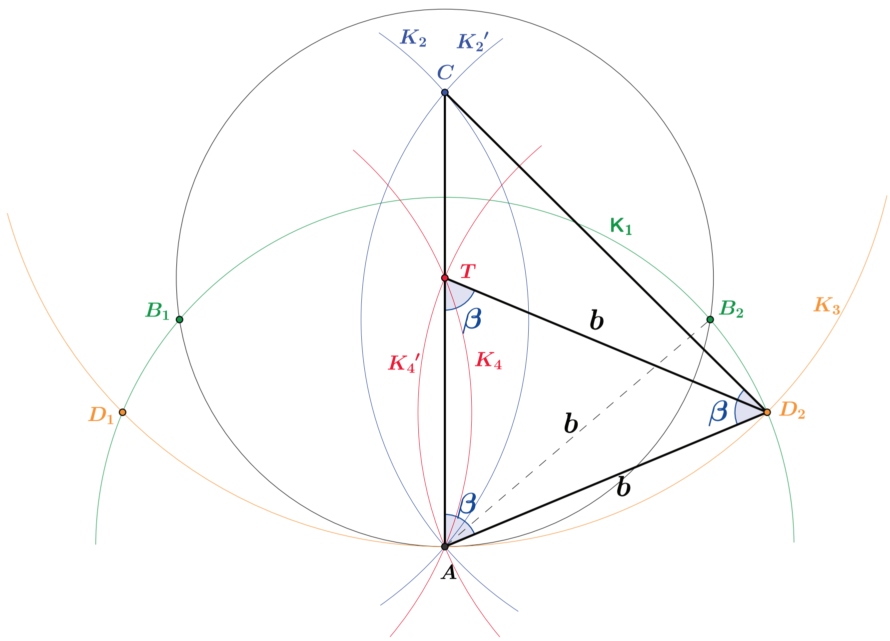
- $|AT| = \dfrac{b^2}{|AC|} = \dfrac{b^2}{\frac{b^2}{r}} = r$.

S tem smo dokazali, da je $T$ res središče prvotne krožnice.

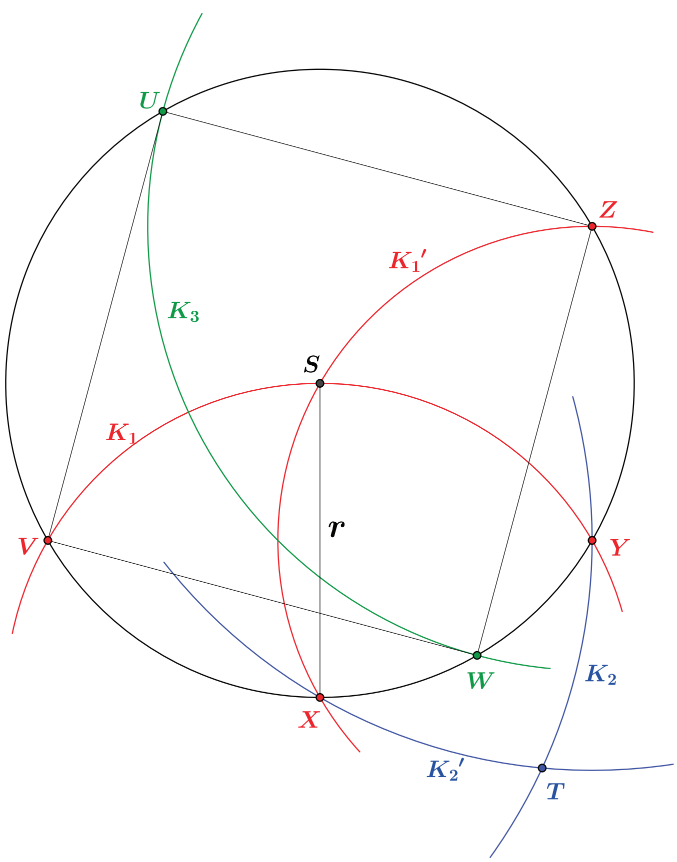
## Drugi del. Konstrukcija včrtanega kvadrata v krog z danim središčem

### Potek konstrukcije

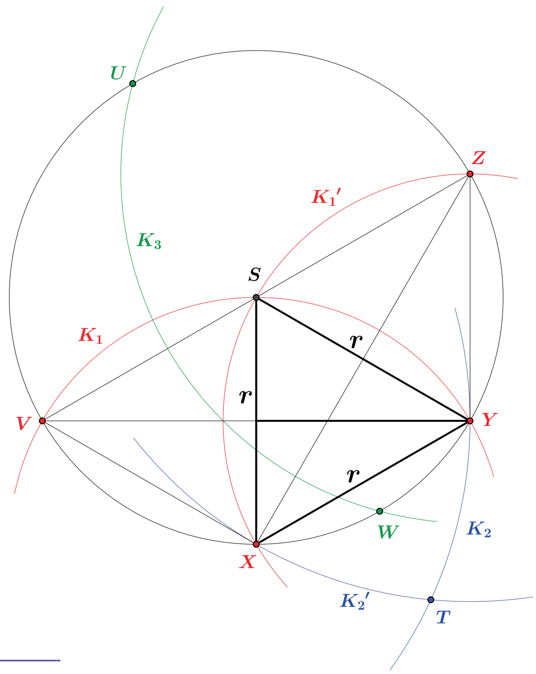
Središče dane krožnice sedaj že znamo določiti, označimo ga z $S$. Na krožnici izberemo poljubno točko $X$ (glej sliko 4). Narišemo krožnico $K_1$ s središčem $X$ in polmerom $|XS|$. Presečišča s prvotno krožnico označimo z $V$ in $Y$. Narišemo krožnico $K_1'$ s središčem $Y$ in enakim polmerom kot $K_1$. Krožnica seka prvotno krožnico v točkah $X$ in $Z$. Potem narišemo krožnici $K_2(V, |VY|)$ in $K_2'(Z, |ZX|)$ ter eno od njunih presečišč označimo s $T$. Nazadnje narišemo še krožnico $K_3$ s središčem $Z$ in polmerom $|ST|$. Presečišči $K_3$ in prvotne krožnice označimo z $U$ in $W$. Točke $VWZU$ so oglišča kvadrata.




**SLIKA 3.**
Drugi del dokaza




**SLIKA 4.**
Konstrukcija včrtanega kvadrata




**SLIKA 5.**
Izračun stranic $|VY|$ in $|ZX|$

## Dokaz

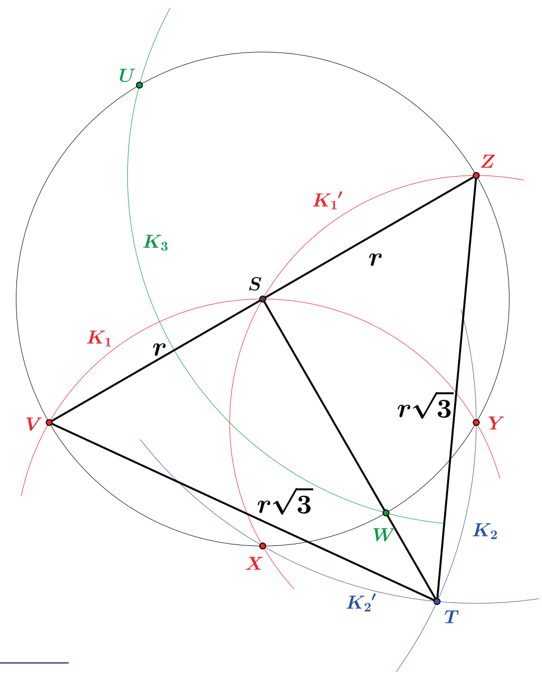
Naj bo polmer dane krožnice $r$. Diagonala kvadrata včrtanega v krožnico bo merila $2r$, torej bo stranica kvadrata dolga $r\sqrt{2}$. S konstrukcijo želimo dobiti dve točki, katerih razdalja meri $r\sqrt{2}$, kar predstavlja dolžino stranice v krožnico včrtanega kvadrata. Naš cilj je dokazati, da sta $V$ in $Z$ diametralni točki in da je $|ZU| = |ST| = r\sqrt{2}$, kar je ravno dolžina stranice kvadrata.

Polmer prvotne krožnice ter krožnic $K_1$ in $K_1'$ meri $r$, zato velja $|VS| = |ZS| = |XS| = |XV| = |XY| = |YS| = |YZ| = r$ (glej sliko 5). Trikotniki $VXS$, $XYS$ in $YZS$ so enakostranični z dolžino stranice $r$. Od tod sledi, da je kot $\angle VSZ = 60° + 60° + 60° = 180°$. Torej točki $V$ in $Z$ ležita na premeru prvotne krožnice. Naslednje, kar nas zanima, je dolžina daljice $|VY|$. Daljica $|XS|$ je simetrala omenjene daljice in jo razpolavlja. Torej je polovica daljice $|VY|$ ravno višina enakostraničnega trikotnika $XYS$ in zato meri $\frac{r\sqrt{3}}{2}$. Torej je dolžina daljice $|VY| = 2 \cdot \frac{r\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}$. Analogno pokažemo, da je $|XZ| = r\sqrt{3}$.

Krožnici $K_2$ in $K_2'$ imata enak polmer. Točki $T$ in $Y$ ležita na $K_2$, zato je $|VY| = |VT|$ (glej sliko 6). Točki $T$ in $X$ pa ležita na $K_2'$, zato je $|ZX| = |ZT|$.Če uporabimo zadnje enakosti, smo ugotovili, da je trikotnik $VTZ$ enakokrak z dolžino kraka $r\sqrt{3}$. Točka $S$ je razpolovišče osnovnice trikotnika $VTZ$, torej je trikotnik $VTS$ pravokoten. Za izračun stranice $|ST|$ uporabimo Pitagorov izrek:

- $$|ST| = \sqrt{|VT|^2 - |SV|^2} = \sqrt{(r\sqrt{3})^2 - r^2}$$
  $$= \sqrt{3r2 - r^2} = r\sqrt{2}.$$

S tem je dokaz zaključen, saj nam je uspelo poiskati razdaljo $r\sqrt{2}$, ki predstavlja dolžino stranice včrtanega kvadrata.




**SLIKA 6.**
Izračun stranice $|ST|$

× × ×