Šahovski kralj v posebnih okoliščinah

Marko Razpet

Obravnavali bomo nekatere preproste kombinatorične probleme na šahovnici. Podobne probleme smo sicer srečali ali že v 15. in 16. letniku Preseka. Novo v tem prispevku pa so ovire, ki jih na različne načine postavimo na šahovnico.

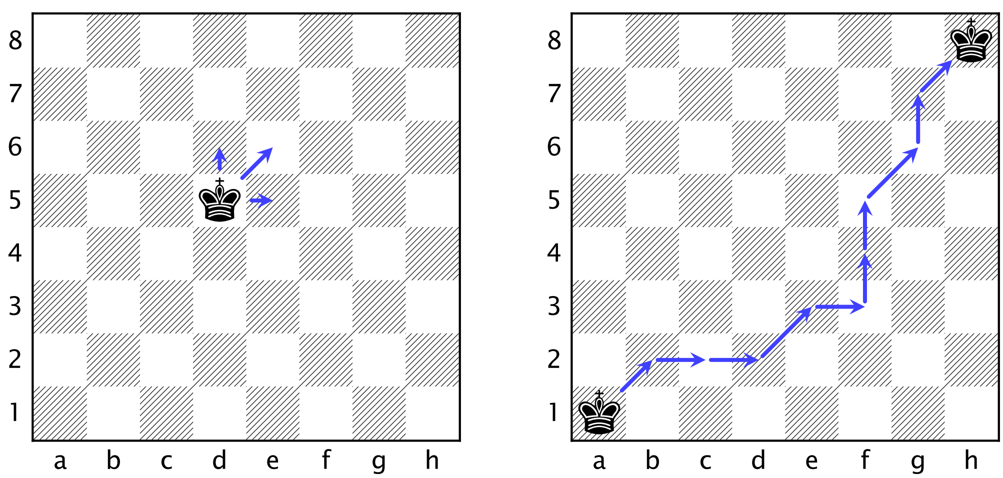
Šahovskega kralja ♚ (lahko tudi ♔) smo izbrali samo zato, ker se sme na šahovnici premikati, če nima ovir, v osmih smereh, vedno samo za eno polje: levo, desno, navzgor, navzdol, pa še v štirih diagonalnih smereh. Vsak tak premik bomo imenovali *korak*. Na šahovnici bo kralj ves čas edina figura.

Vsako polje **xy** je označeno s črko **x** iz množice $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d},\mathbf{e},\mathbf{f},\mathbf{g},\mathbf{h}\}$ in številko **y** iz množice $\{\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4},\mathbf{5},\mathbf{6},\mathbf{7},\mathbf{8}\}$. Črke označujejo vertikale, številke pa horizontale. Polje **c5** je na primer na vertikali **c** in na horizontali **5**. Namesto opisane tradicionalne šahovske oznake polja **xy** bomo raje uporabljali matematično koordinatno oznako (i,j). Pri tem pomeni i absciso, j pa ordinato polja (i,j). Za šahovska polja sta koordinati i,j števili iz množice $\mathcal{J}=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ (glej spodnji in levi rob tabele 1). Primeri. $\mathbf{a1}=(0,0),\mathbf{f7}=(5,6),\mathbf{h8}=(7,7)$.

Na začetku stoji kralj na polju $(0,0)$. Njegov cilj pa je prispeti na polje $(7,7)$, pa ne kakorkoli, ampak tako, da je *cilju po vsakem koraku bliže*. To pa pomeni, da lahko kjerkoli na šahovnici izbira samo med tremi koraki: na desno, navzgor in diagonalno desno-navzgor. Kralj na ta način s polja $(0,0)$ na polje (i,j) opravi neko *pot* (slika 1). Tukaj obravnavamo samo take poti.

1. vprašanje. Koliko je različnih poti šahovskega kralja s polja $(0,0)$ na polje (i,j), pri čemer se cilju po vsakem koraku približa?

Zagotovo je možna ena sama pot s polja $(0,0)$ na katerokoli polje $(i,0)$ oziroma $(0,j)$, kjer sta i oziroma j v $\mathcal{J}$. Označimo z $D(i,j)$ število poti s polja $(0,0)$ na polje (i,j). Na polje (i,j) lahko kralj prispe v enem koraku na tri načine: s polja $(i-1,j)$, s polja $(i,j-1)$ ali s polja $(i-1,j-1)$. To pa pomeni, da



SLIKA 1.
Koraki in pot šahovskega kralja

za $i, j \geq 1$ velja relacija

- $D(i,j) = D(i-1,j) + D(i,j-1) + D(i-1,j-1)$.

Ker veljata pogoja $D(i,0) = 1$ in $D(0,j) = 1$, lahko števila $D(i,j)$ izračunamo samo s seštevanjem. V ta namen zapišemo rezultate v tabelo. Pri tem, da hitreje izpopolnimo tabelo, upoštevamo simetričnost: $D(i,j) = D(j,i)$.

Primer. Število $681 = D(5,4)$ je vsota uokvirjenih števil $321 = D(4,4)$, $231 = D(5,3)$ in $129 = D(4,3)$.

Število poti s polja $(0,0)$ na polje $(7,7)$ je torej $D(7,7) = 48639$. To število je kar veliko. Če bi vsako sekundo narisali eno pot, bi potrebovali 13 ur, 30 minut in 39 sekund, da bi dobili vse. Potrebovali pa bi več tisoč listov papirja formata A4, da bi nanje narisali vse poti, čeprav bi jih na vsak list na vsaki strani narisali 20.

Števila $D(i,j)$ so *Delannoyjeva števila*, ki jih je prvi obravnaval francoski amaterski matematik in častnik Henri Auguste Delannoy (1833–1915).

Za Delannoyjeva števila obstajajo tudi eksplicitne formule, ki pa niso preproste in se izražajo s končnimi vrstami, ki vsebujejo binomske koeficiente. Več o tem lahko preberemo npr. v [1, 2].

Tabelo Delannoyjevih števil lahko seveda razširimo do poljubne velikosti. Uporabimo pa jo lahko tudi za izračun števila poti s polja (i,j) na polje (u,v). Poti ni, če je $i > u$ ali $j > v$. V nasprotnem primeru pa je število poti enako $D(u-i, v-j)$. Tedaj je polje (u,v) s polja (i,j) *dosegljivo*.

2. vprašanje. Koliko je različnih poti šahovskega kralja s polja $(0,0)$ na polje $(7,7)$, pri čemer se cilju po vsakem koraku približa, na šahovnici pa je polje (p,q), na katerega kralj zaradi ovire ne more stopiti?

Na sliki 2 levo je ovirano polje **d5** oziroma $(3,4)$. Lahko si tudi mislimo, da tega polja preprosto ni. Število poti s polja $(0,0)$ na ovirano polje je 0.

Poti bo zdaj seveda manj kot $D(7,7)$, in sicer za število poti $P(p,q)$ s polja $(0,0)$ čez ovirano polje (p,q) do ciljnega polja $(7,7)$. Po osnovnem izreku kombinatorike je $P(p,q)$ enako produktu števila poti s polja $(0,0)$ na polje (p,q) s številom poti s polja (p,q) na polje $(7,7)$, torej $P(p,q) = D(p,q) \cdot D(7-p, 7-q)$. Število dovoljenih poti označimo z $N(p,q)$. Tako smo našli:

- $N(p,q) = D(7,7) - D(p,q) \cdot D(7-p, 7-q)$.

V posebnih primerih je $N(0,0) = 0$ in $N(7,7) = 0$, saj kralj v prvem primeru na start niti ne more stopiti, na cilj pa ne dospeti. Poti potemtakem sploh ni.

V primeru oviranega polja $(3,4)$ je

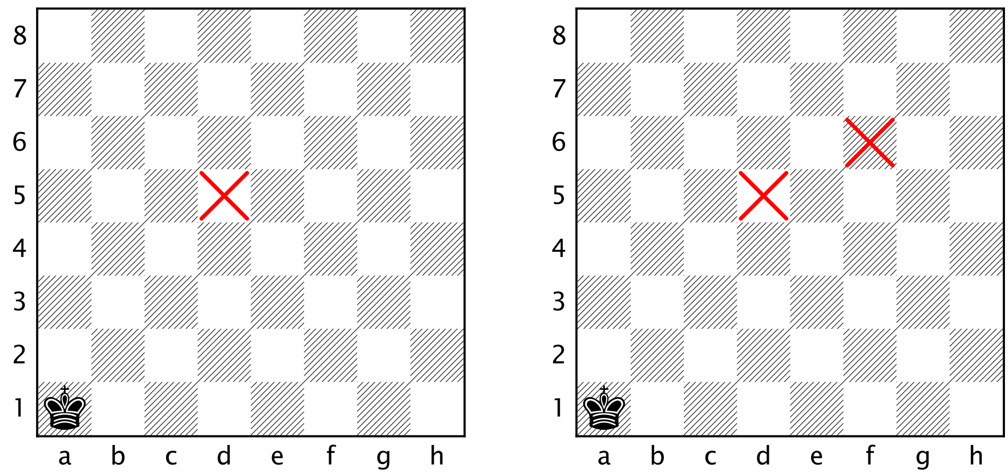
- $N(3,4) = D(7,7) - D(3,4) \cdot D(4,3)$
  $= 48639 - 129^2 = 31998$.

V tem primeru je torej število poti nekoliko manjše kot brez ovire: 31998. Do rezultata lahko pridemo tudi s tabelo, v katero postavimo črn kvadratek v celico $(3,4)$, in zanjo ničesar ne računamo, za preostale celice pa računamo tako kot v tabeli 1,

3. vprašanje. Koliko je različnih poti šahovskega kralja s polja $(0,0)$ na polje $(7,7)$, pri čemer se cilju

7	**8**	1	15	113	575	2241	7183	19825	48639
6	**7**	1	13	85	377	1289	3653	8989	19825
5	**6**	1	11	61	231	681	1683	3653	7183
4	**5**	1	9	41	129	$\boxed{321}$	**681**	1289	2241
3	**4**	1	7	25	63	$\boxed{129}$	$\boxed{231}$	377	575
2	**3**	1	5	13	25	41	61	85	113
1	**2**	1	3	5	7	9	11	13	15
0	**1**	1	1	1	1	1	1	1	1
j		**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**
	i	0	1	2	3	4	5	6	7

TABELA 1.
Delannoyjeva števila. Število poti.



SLIKA 2.
Šahovnici s prepovedanimi polji

po vsakem koraku približa, na šahovnici pa sta polji (p,q) in (r,s), na kateri kralj zaradi ovir ne more stopiti?

Tedaj je pomembno, če je eno od njiju v normalnih okoliščinah dosegljivo iz preostalega. V tem primeru je npr. $p \le r$ in $q \le s$. Med potmi, ki gredo posebej čez (p,q) in posebej čez (r,s), so tudi tiste, ki gredo hkrati čez (p,q) in (r,s). Zato je število prepovedanih poti

- $P(p,q;r,s) = D(p,q) \cdot D(7-p,7-q) +$
  $D(r,s) \cdot D(7-r,7-s) -$
  $- D(p,q) \cdot D(r-p,s-q) \cdot D(7-r,7-s).$

V primeru nedosegljivosti prepovedanih polj tudi velja zgornja formula, če postavimo $D(x,y) = 0$, če je vsaj eno od števil x in y negativno. Potem je število vseh poti pri danih prepovedanih poljih (p,q) in (r,s) enako

- $N(p,q;r,s) = D(7,7) - P(p,q;r,s).$

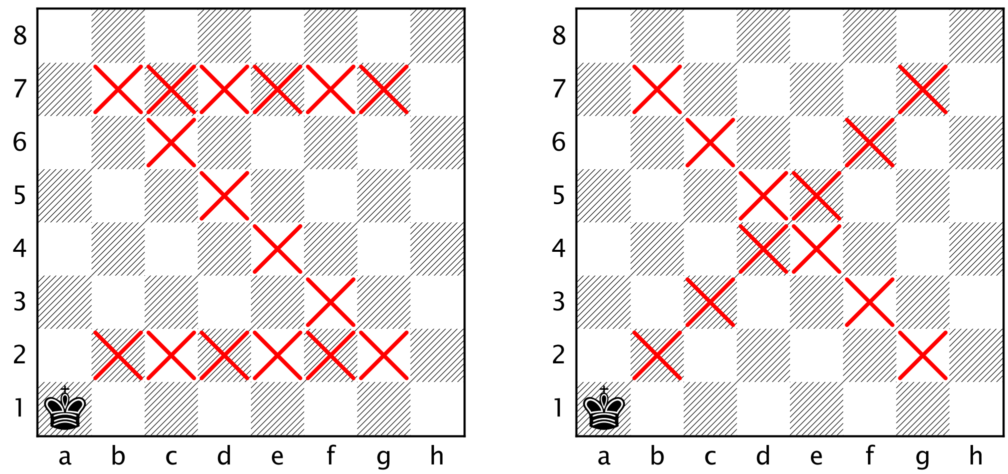
Na sliki 2 desno sta prepovedani polji $(3,4)$ in $(5,5)$. V tem primeru je

- $N(3,4;5,5) = D(7,7) - D(3,4) \cdot D(4,3) -$
  $- D(5,5) \cdot D(2,2) + D(3,4) \cdot D(2,1) \cdot D(2,2) =$
  $= 48639 - 129^2 - 1683 \cdot 13 + 129 \cdot 5 \cdot 13 = 18504.$

Kljub omejitvam je število poti s polja $(0,0)$ na polje $(7,7)$ še vedno veliko: kar 18504. Rezultat lahko preverimo tudi s tabelo.

7	**8**	1	15	113	446	1338	3958	11698	31998
6	**7**	1	13	85	248	644	1976	5764	14536
5	**6**	1	11	61	102	294	1038	2750	6022
4	**5**	1	9	41	■	192	522	1160	2112
3	**4**	1	7	25	63	129	231	377	575
2	**3**	1	5	13	25	41	61	85	113
1	**2**	1	3	5	7	9	11	13	15
0	**1**	1	1	1	1	1	1	1	1
j		**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**
	i	0	1	2	3	4	5	6	7

TABELA 2.
Število poti z oviranim poljem $(3,4)$



SLIKA 3.
Šahovnici z več prepovedanimi polji

Prav tako lahko oviramo kralja, da bi stopil na tri, štiri ali več polj. Pri treh preštejemo prehode prek enega oviranega polja, preko dveh, kjer je več možnosti, in preko vseh treh. V bistvu uporabimo v kombinatoriki znano načelo vključitve-izključitve. Da se izognemo zapletenim računom, je najenostavneje, da naredimo tabelo. Vanjo v celice, ki ustrezajo oviram, vpišemo črne kvadratke in postopamo tako kot v tabeli 2. Navajamo primer za ovirana polja, ki so označena na sliki 3 levo. Število poti s polja $(0,0)$ na polje $(7,7)$ se je pri postavljenih ovirah drastično zmanjšalo na 220. Tabeli, ki ustrezata slikama 2 in 3 desno, pa naj na tak način sestavijo bralci. Še eno vprašanje. Koliko je poti, če postavimo ovire na vsa polja razen na vertikali **a** in **h** ter horizontali **1** in **8**?

Literatura

[1] M. Razpet, *Poravnava nizov in Delannoyjeva števila*, Obzornik mat. fiz. **58** (2011), št. 4, str. 133–145.

[2] R. A. Sulanke, *Objects counted by the Delannoy numbers*, Journal of Integer Sequences **6** (2013), članek 03.1.5, 1–19.

7	**8**	1	2	2	2	2	2	2	220
6	**7**	1	■	■	■	■	■	■	218
5	**6**	1	8	■	18	30	56	88	130
4	**5**	1	6	18	■	12	14	18	24
3	**4**	1	4	8	12	■	2	2	4
2	**3**	1	2	2	22	2	■	0	2
1	**2**	1	■	■	■	■	■	■	2
0	**1**	1	1	1	1	1	1	1	1
j		**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**
	i	0	1	2	3	4	5	6	7

TABELA 3.
Število poti s prepovedjo prehoda preko več polj (slika 3 levo)