

Po deblu z vrvno zanko



BARBARA ROVŠEK

→ Navdih za ta prispevek je druga teoretična naloga s 5. Evropske fizikalne olimpijade (EFO), naloga je na sliki 1. Spodbudo za pisanje pa je prispeval urednik Preseka potem, ko smo nalogo v stiski s časom le približno rešili na prvem zoom srečanju Presekovega seminarja za učitelje matematike in fizike. Zdaj nas čas ne davi in si bomo privoščili uvod, jedro in zaključek, pa še o praktičnem preizkusu bomo poročali.

Včasih mora gozdar pri delu splezati na drevo, delavec elektro podjetja na drog javne razsvetljave, vojak pa za vajo na kar en drog. Pri plezanju si lahko pomagajo na različne načine; eden od načinov je, da okoli drevesa ali droga napeljejo vrvno ali tračno zanko, ki jo na deblu zadrži sila lepenja (slika 2). Ta sila ne zadrži le same zanke, ampak tudi gozdarja, delavca ali vojaka, ki je vpet v zanko, kot prikazuje slika 2. Ta tehnika ni nova iznajdba; tako so si npr. pri plezanju na drevesa med obiranjem plodov že davno pomagali nabiralci kokosovih oreh (slika 3).

Izkaže se, da lahko pogoj za to, da zanka ne zdrsi ob deblu ali drogu navzdol, izrazimo kot pogoj, ki mu mora zadostiti razmerje med dolžino zanke L in obsegom debla ali droga $2\pi R$ in v katerem, seveda, nastopa tudi koeficient lepenja (statičnega trenja). Za povrh bomo izračunali še obliko zanke.

Naloga. Okoli navpičnega valja s polmerom osnovne ploskve R je ovita vrvna zanka z dolžino $L \geq L_0 = 2\pi R$. Iščemo največjo možno dolžino zanke L , pri kateri zanka še obstane na valju, ko jo vlečemo vzdolž osi valja s silo $\vec{F}$, ki je poljubno velika (in se vrvica še ne pretrga), kot prikazuje slika 4. Silo težje vrvice lahko zanemarimo, ker je bistveno manjša od sile $\vec{F}$. Zanko vlečemo ob valju vzporedno z njegovo osjo.

T2: Valj na povodcu

Na vrvici je zanka z obsegom $L > 2\pi R$, v katero namestimo valj s polmerom R . Med vrvico in valjem deluje trenje, koeficient trenja je μ . Prosto krajišče vrvice vlečemo navzdol vzporedno z osjo nepremičnega valja (kot prikazuje slika). Če je obseg zanke večji od kritičnega obsega $L > L_0$, zanka zdrsne po valju, pri čemer se njena oblika ne spremeni. Če je obseg zanke manjši od kritičnega, trenje med zanko in valjem povzroči, da zanka ostane na svojem mestu (trenje jo "zaklene"). S povečevanjem sile bi se zanka v tem primeru v nekem trenutku strgala. Poišči kritični obseg zanke L_0 . Maso vrvice zanemari; prav tako upoštevaj, da se vrvica niti ne zvija niti ne suče, ko jo vlečemo navzdol.

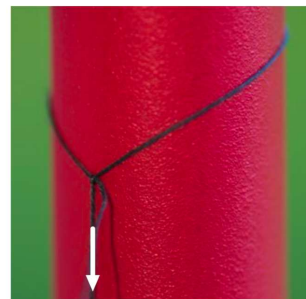
Utegne ti koristiti, če veš, da velja

$$2 \int \sqrt{1+x^2} dx = x\sqrt{1+x^2} + \operatorname{arcsinh} x,$$

kjer je $\operatorname{arcsinh} x \equiv \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

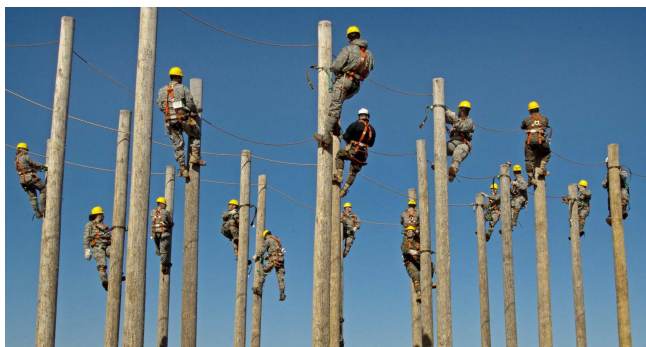
SLIKA 1.

Druga teoretična naloga (od treh) na 5. Evropski fizikalni olimpijadi, ki je potekala na daljavo junija 2021.



Naloga je tipična naloga iz matematične fizike: iz fizikalnih zakonov mehanike (o ravnovesju), zapisanih za majhen del sistema (del vrvice v zanki, naviti okoli debla), izpeljemo diferencialno enačbo. Razmislimo še o robnih pogojih ter poiščemo rešitev – funkcijo, ki zadosti diferencialni enačbi in robnim pogojem ter opiše obliko vrvne zanke okoli debla.

Preden se lotimo računov, preverimo nalogo s poskusom: na lesen valj (uporabili smo valj iz otroške lesene sestavljanke s premerom 3,9 cm) nata-



SLIKA 2.

Ameriški vojaki vadijo plezanje po drogovi. Pri tem uporabljajo vrvi in trakove, ki jih ovijejo okoli drogov (www.piqsels.com/en/public-domain-photo-fjpti).

knemo zanko, ki jo naredimo tako, da lahko uravnavamo njen obseg. Zanko vlečemo ob valju vzporedno z njegovo osjo (vseeno je, kako je valj orientiran v prostoru in ali vlečemo navzgor ali navzdol). Če je obseg zanke prevelik, zanka ob valju drsi (slika 5a) Opazimo lahko, da se oblika zanke med drsenjem vzdolž enakomerno gladkega (oziroma hrpačvega) plašča valja ne spreminja. Obseg zanke postopoma zmanjšujemo, dokler obseg ni dovolj majhen, da zanka valj objame tako, da po njem ne zdrsne več (slika 5b).

Poskus ponovimo še z valjem, ovitim v list papirja. Ko najdemo največji obseg zanke, pri katerem zanka ne zdrsne po valju, na papirju, v katerega je ovit valj, s flomastrom označimo obris zanke (slika 5c). Zanko snamemo, papir razvijemo in si ogledamo črto, ki označuje lego zanke: videti je kot del krožnega loka ali parabola – izkaže se, da tudi je parabola (slika 5d).

Zdaj se naloge lotimo še teoretično. Kaj lahko povemo o tem fizikalnem pojavu? Zanka na valju miruje, torej so sile na zanko v ravnovesju. V smeri navzgor deluje na zanko sila $\vec{F}$, s katero zanko vlečemo ob plašču valja v smeri simetrijske osi valja. To silo uravnovesi sila lepenja, ki prijemlje po celotni dolžini zanke in je v mejnem primeru (ko je vrvice v zanki tako dolga, kot je največ lahko in na meji zdrsa) na vsakem delčku vrvice v zanki usmerjena v smeri, nasprotni smeri sile $\vec{F}$ in smeri zdrsa, ko sila $\vec{F}$ preseže mejno silo. Poleg tega je v mejnem primeru velikost sile lepenja, ki deluje na vsak delček vrvice (z dolžino Δl), največja mogoča, $\Delta F_l = k \cdot \Delta F_\perp$, kjer



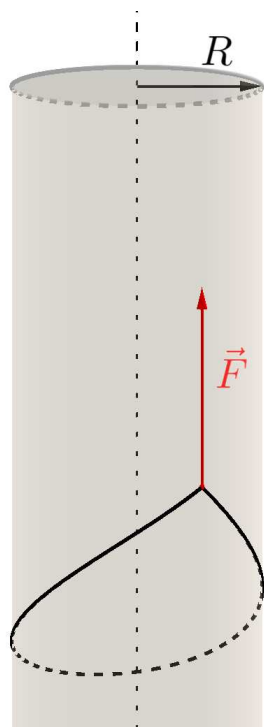
SLIKA 3.

Nabiralec kokosovih orehov, poklic starodavne in tradicionalne kulture Tamilcev (Thamizhparithi Maari, CC BY-SA 3.0, via Wikimedia Commons).

je k koeficient lepenja in $\Delta F_\perp$ sila, s katero valj pritiska na delček zanke v smeri pravokotno na plašč valja in stran od osi valja. Tik pred zdrsom neenačba $\Delta F_l \leq k \cdot \Delta F_\perp$, ki sicer opredeljuje silo lepenja, preide v enačbo.

Kot smo namignili v uvodu, se naloge lotimo z obravnavo majhnega dela sistema. Opišimo torej ravnovesje delčka zanke z dolžino Δl : na obeh krajših delujeta nanj preostala vrv s silama $\vec{F}_1$ in $\vec{F}_2$, in valj, na katerega je zanka navita, s silo valja $\Delta \vec{F}_v$. Silo valja lahko kar takoj izrazimo kot vsoto sile $\Delta \vec{F}_\perp$, s katero valj pritiska na delček zanke v radialni smeri (navzven), in sile lepenja $\Delta \vec{F}_l$, ki deluje na delček zanke v smeri, ki je vzporedna simetrijski osi valja in nasprotna sili $\vec{F}$ (in tangencialna na plašč valja) (slika 6).



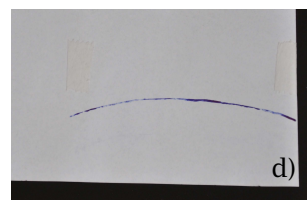
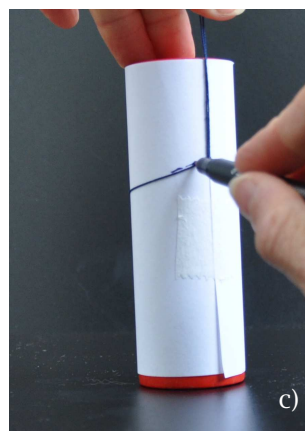
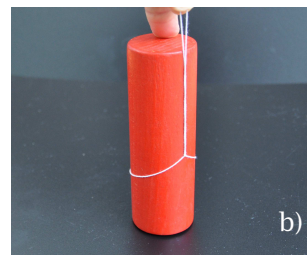
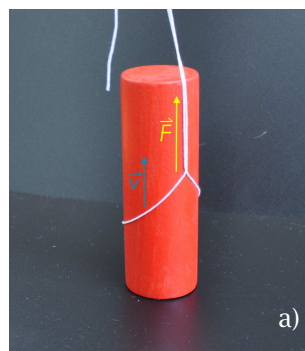


SLIKA 4.

Skica valja in vrvne zanke, ki objema valj in ki jo v smeri, vzporedni s simetrijsko osjo valja, v eni točki vleče sila $\vec{F}$.

Sili $\vec{F}_1$ in $\vec{F}_2$ sta makroskopski sili, ki napenjata delček vrvne zanke, ovite okoli valja. Po velikosti sta skoraj enaki in primerljivi s silo $\vec{F}$. Sili $\vec{F}_1$ in $\vec{F}_2$ ležita vsaka v svoji ravnini, tangencialni na plašč valja. Ti dve ravnini sta skoraj vzporedni, pa ne popolnoma: ena glede na drugo je zasukana za majhen kot $\Delta\varphi$, kot prikazuje slika 7, kjer valj, okoli katerega je zanka navita, opazujemo z vrha (opazujemo osnovno ploskev).

Sile, ki smo jih našteali, so usmerjene v različne smeri prostora. Izkaže se, da je vsako od njih prikladno razstaviti na dve komponenti: na komponentno vzdolž simetrijske osi valja – osi z , in komponento, ki leži v ravnini xy . Če vpeljemo še koordinato w , ki meri lego delov vrvne zanke po obsegu valja (izhodišče $w = 0$ je nasproti prijemališča sile $\vec{F}$, prijemališče te sile pa je pri $w = \pm\pi R$), lahko vsako od sil, ki delujejo na delček zanke, zapišemo z največ dvema komponentama.



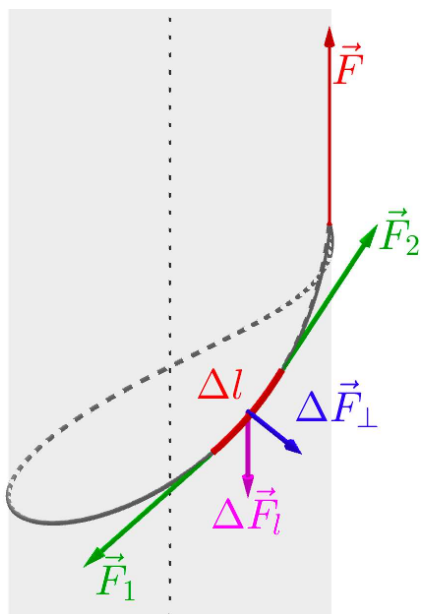
SLIKA 5.

a) Zanka s prevelikim obsegom drsi vzdolž valja. b) Ko obseg zanke dovolj zmanjšamo, se zanka zadrzne okoli valja in na njem miruje. c) Valj po plašču tesno ovijemo z listom papirja in ponovimo poskus z zanko. S flomastrom na papir narišemo obris zanke. d) Papir (plašč valja) razgrnemo in si ogledamo obliko zanke še v dveh dimenzijah.

Sila $\Delta\vec{F}_\perp$ leži v ravnini xy (je pravokotna na plašč valja in glede na postavitev valja po definiciji nima komponente v smeri osi z), sila $\Delta\vec{F}_\parallel$ pa je usmerjena vzdolž osi z (nima komponente v ravnini xy , kar smo zahtevali na začetku).

Vodoravni komponenti sil $\vec{F}_1$ in $\vec{F}_2$, ležita v ravnini xy in hkrati vsaka v svoji (na plašč valja) tangencialni ravnini. Ti dve komponenti označimo z $\vec{F}_{1,w}$ in $\vec{F}_{2,w}$. Na sliki 8 so prikazane vse komponente sil v ravnini xy : ker delček vrvice (na sliki označen z rdečo) miruje, je njihova vsota enaka 0. Ker je sila $\Delta\vec{F}_\perp$ radialna, komponenti $\vec{F}_{1,w}$ in $\vec{F}_{2,w}$ pa tangencialni, v ravnovesju neizbežno velja

$$|\vec{F}_{1,w}| = |\vec{F}_{2,w}| = F_w.$$



SLIKA 6.

Sile, ki delujejo na del zanke z dolžino Δl , ko zanko na enem mestu vleče vzdolž osi sila $\vec{F}$ in zanka miruje.

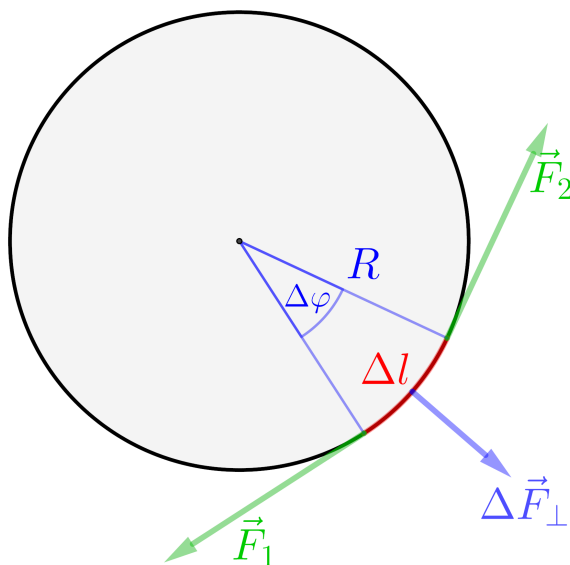
To pomeni, da je ta komponenta sile, ki napenja delček vrvene zanke, po celi zanki (za vse delčke zanke) povsod enaka. Na sliki 8 (pa tudi že na sliki 7) ima projekcija delčka vrvene zanke z dolžino Δl na ravnino xy dolžino $\Delta w = R \cdot \Delta\varphi$, kjer je $\Delta\varphi = \frac{\Delta w}{R}$ kot, ki ga delček zanke opiše v ravnini xy .

Zapišimo pogoj za ravnovesje sil, ki delujejo na delček zanke, posebej za komponente sil v ravnini xy in potem še za komponente sil v smeri osi z .

Za velikosti komponent sil v ravnini xy v ravnovesju velja $\Delta F_{\perp} = 2 \cdot F_w \cdot \sin \frac{\Delta\varphi}{2}$. Ko upoštevamo, da je $\Delta\varphi$ (in seveda tudi $\frac{\Delta\varphi}{2}$) zelo majhen in zato $\sin \frac{\Delta\varphi}{2} \approx \frac{\Delta\varphi}{2}$, dobimo za velikost radialne sile, s katero delček vrvene zanke pritiska na valj, ta pa nazaj nanj, izraz

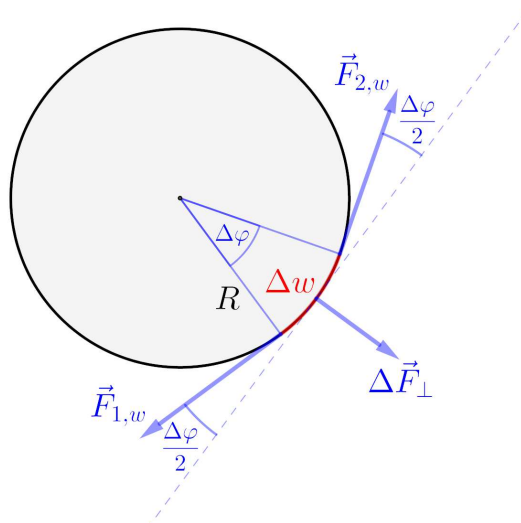
$$\Delta F_{\perp} = 2 \cdot F_w \cdot \frac{\Delta\varphi}{2} = F_w \cdot \Delta\varphi = F_w \cdot \frac{\Delta w}{R}.$$

(Vemo, kam nas vodijo vsi ti Δ ; ne slepomišimo in kar na sredi poti preidimo z Δ na infinitezimalno dolžino zanke in razlik: $\Delta l \rightarrow dl$, $\Delta\varphi \rightarrow d\varphi$, $\Delta w \rightarrow dw$ in tudi za sili, ki sta majhni, zapišimo $\Delta F_{\perp} \rightarrow dF_{\perp}$ in $\Delta F_l \rightarrow dF_l$.)



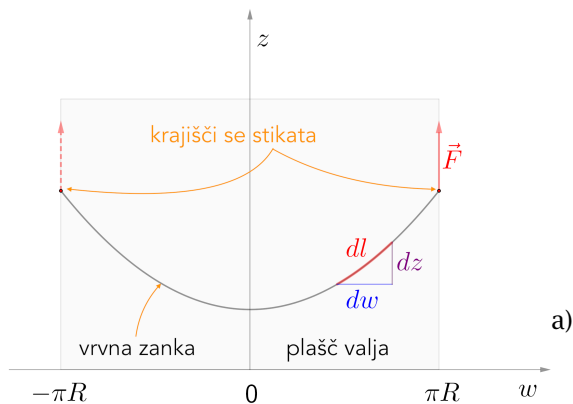
SLIKA 7.

Pogled na del zanke z vrha valja. Sili $\vec{F}_1$ in $\vec{F}_2$ ležita vsaka v svoji ravnini, tangencialni na plašč valja, in sta ena glede na drugo zasukani za kot $\Delta\varphi$ (okoli osi valja).

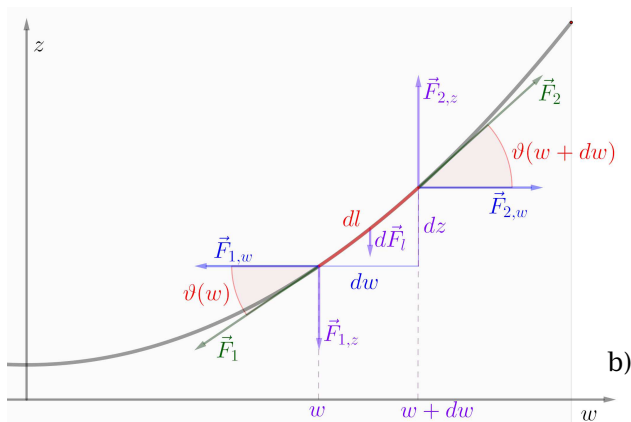


SLIKA 8.

Komponente sil na del zanke, ki ležijo v ravnini xy .



a)



b)

SLIKA 9.

a) Oblika zanke, ki miruje na valju, v ravnini, v katero razgrnemo plašč valja. Sila $\vec{F}$ prijemlje v točki $w = \pm\pi R$. b) Komponente sil, ki delujejo na del zanke z dolžino dl in ki ležijo v ravninah, tangencialnih na plašč valja; prikažemo pa jih v ravnini, v katero razgrnemo plašč valja.

Ostale so nam še komponente sil v smeri simetrijske osi valja, osi z . Skico zanke, delčka zanke in sil, ki delujejo nanj, narišemo še v ravnini, v katero razgrnemo plašč valja (slika 9a, kot na sliki 5d). Za velikosti komponent sil vzdolž osi z v ravnovesju (glej sliko 9b) velja $F_{2,z} = F_{1,z} + dF_l$. Komponenti $F_{1,z}$ in $F_{2,z}$ izrazimo z $F_{1,w} = F_{2,w} = F_w$ in tangensom kota ϑ pri krajiščih delčka zanke; velja $\tan \vartheta = \frac{dz}{dw}$ in $F_{1,z} = F_w \cdot \tan \vartheta|_w$ in $F_{2,z} = F_w \cdot \tan \vartheta|_{w+dw}$. Ko izenačimo oba izraza za silo lepenja, ki deluje na

delček zanke,

$$\blacksquare dF_l = k \cdot dF_{\perp} = k \cdot F_w \cdot \frac{dw}{R}$$

in

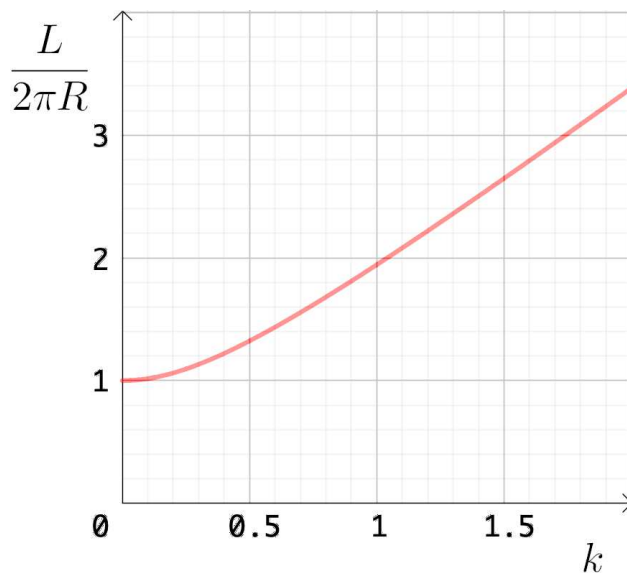
$$\blacksquare dF_l = F_{2,z} - F_{1,z} = F_w \cdot \left(\frac{dz}{dw} \Big|_{w+dw} - \frac{dz}{dw} \Big|_w \right)$$

dobimo diferencialno enačbo za funkcijo $z(w)$, ki opiše lego vrhne zanke na valju

$$\blacksquare \frac{\frac{dz}{dw} \Big|_{w+dw} - \frac{dz}{dw} \Big|_w}{dw} = \frac{d^2z}{dw^2} = \frac{k}{R}.$$

Funkcija, katere drugi odvod je konstanta, je parabola, $z(w) = \frac{k}{2R} w^2$, pri čemer smo izbrali vrednost (robni pogoj) $z(w = 0) = 0$.

Ostal nam je še izračun obsega vrhne zanke, kar je zdaj s pomočjo matematičnega priročnika ali namiga s konca naloge (slika 1) razmeroma enostavna vaja iz

**SLIKA 10.**

Graf razmerja $\frac{L}{2\pi R} = \frac{L}{L_0}$ med dolžino zanke in obsegom droga v odvisnosti od koeficienta lepenja k .

integriranja:

$$\begin{aligned} L &= \int dl = 2 \int_0^{\pi R} \sqrt{dz^2 + dw^2} \\ &= 2 \int_0^{\pi R} \sqrt{1 + \left(\frac{dw}{dz}\right)^2} dz \\ &= 2 \int_0^{\pi R} \sqrt{1 + \left(\frac{kw}{R}\right)^2} dz \end{aligned}$$

in končno dobimo kritični obseg zanke, pri katerem zanka ravno še ne zdrsne po valju

$$L = R\pi\sqrt{1 + (k\pi)^2} + \frac{R}{k} \operatorname{arcsinh}(k\pi).$$

V skrajnem primeru, ko je lepenja zelo malo ali nič, torej $k \rightarrow 0$, funkcijo $\operatorname{arcsinh}(x)$ nadomestimo s 1. členom v njenem razvoju v Taylorjevo vrsto, $\operatorname{arcsinh}(x) = x - \frac{x^3}{6} + \dots$ in izraz za L preide v obseg valja: $L = R\pi + \frac{R}{k} k\pi = 2\pi R$. Če po drogu bolj drsi kot ne, mora delavec vrv okoli njega napeljati zelo tesno in kar po obsegu droga. Če je lepenja več, si lahko privoščimo nekoliko daljšo zanko. Graf, ki prikazuje, kako je razmerje $\frac{L}{2\pi R}$ odvisno od koeficienta lepenja, je na sliki 10.

Kako na »strmino« oziroma naklon zanke $\frac{dz}{dw}$ vpliva koeficient lepenja k in polmer valja R ? Naklon zanke se vzdolž obsega zanke spreminja sorazmerno z oddaljenostjo od najnižje točke; $\frac{dz}{dw} = \frac{k}{R} w$; naklon je sorazmeren k in obratnosorazmeren R . Povprečni naklon zanke po celem obsegu pa je odvisen le od k : $\left(\frac{dz}{dw}\right) = \frac{z(w=\pi R) - z(w=0)}{\pi R} = \frac{k\pi}{2}$, kar prikazujejo tudi zaporedne sličice na sliki 11, kjer je zanka

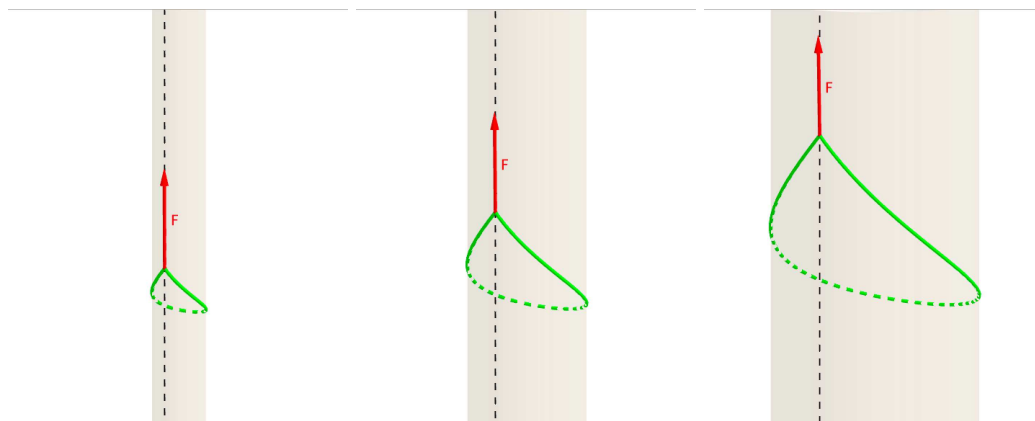
ovita okoli različno debelih valjev pri istem koeficientu lepenja k .

Še eno (no, eno in pol) vprašanje nam pride na misel: kolikšna je lahko največ sila $\vec{F}$, da se vrv ne strga? Kje se strga? Pustimo bralcu zadoščenje, da sam poišče odgovora!

Začeli smo s fotografijami uporabnikov tega pojava, ki s pomočjo vrvne tehnike plezajo na drogeve in drevesa. Pozornemu očesu ni ušla podrobnost, v kateri se realni prizori nekoliko razlikujejo od tu obravnavanega problema: obiralec kokosovih orehov na sliki 3 je v zanki vpet na tak način, da jo vleče v smeri, ki ni vzporedna z osjo debla. Na tak način povzroči večjo pravotno komponento sile debla na zanko in tudi ustrezno večjo silo lepenja ter doseže, da je njegovo plezanje še bolj varno.

S tako zapletenimi nalogami, ki znatno presegajo obseg srednješolske fizike, se morajo ukvarjati dijaki na Evropski fizikalni olimpijadi. In ukvarjajo se uspešno; med priznanji, ki so jih na EFO dobili, sta tudi dve *Best solution of Theoretical problem* (Marko Čmrlec in Tevž Lotrič) in ena *Best in Theory* (skupen uspeh pri reševanju teoretičnih nalog, Marko Čmrlec). Arhiv nalog, rešitev in rezultatov z vseh petih dosedanjih EFO je na spletni strani eupho.ee. Na spletni strani www.geogebra.org/m/g2wdhstw pa si lahko zanko, ki je napeta okoli valja, ogledaš iz različnih smeri, pa še vpliv koeficienta lepenja na njeno obliko lahko opazuješ.

Priporočamo tudi ogled kratkega posnetka plezanja po deblu s tradicionalno tehniko japonskih obiralcev cipres (buri-nawa) na YouTubeu: youtu.be/_Octm4nK2Fc.



SLIKA 11.

Vrvica s kritično dolžino L , napeta okoli različno debelih drogov pri istem koeficientu lepenja k .

× × ×