

Problem kitajskih prstanov



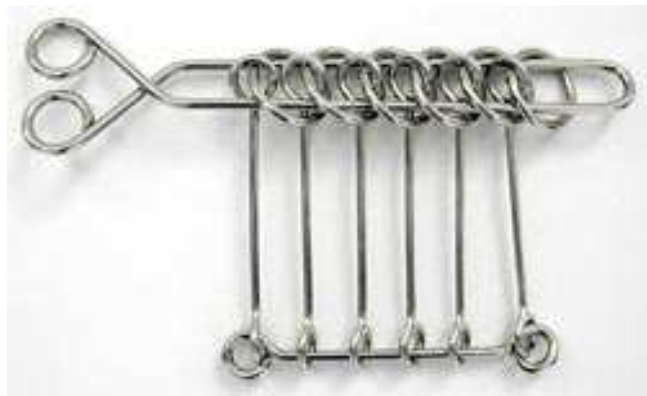
TANJA GOLOGRANC

Zgodovina problema

Problem kitajskih prstanov je ena najbolj znanih matematičnih ugank. Prvotni problem sestavlja palica z devetimi povezanimi prstani, pri čemer lahko devet nadomestimo s poljubnim številom prstanov (glej sliko 1). Te prstane moramo s palice odstraniti. Nihče ne ve natančno, kdo je avtor sestavljanke in kdaj se je prvič pojavila; obstajajo le pripovedke. Ena izmed najbolj znanih govori o tem, da naj bi palico z devetimi povezanimi prstani za svojo ženo izumil kitajski strateg Zhuge Liang (181–234), in sicer z namenom, da bi si krajšala čas, ko je bil sam na vojnih pohodih. Drugi, prav tako nezanesljivi viri trdijo, da uganke izhaja iz dinastije Song (960–1129). Prvi zapis ugank tega tipa sega v 14. stoletje, njegov avtor pa je italijanski matematik Luca Pacioli (1445–1517).

Opis problema

Imamo palico in prstane, pri čemer se prstani ne prepletajo le med sabo ampak prepletajo tudi palico. Te prstane moramo s palice odstraniti. Tako kot za večino znamenitih ugank tudi za problem kitajskih prstanov velja, da ga rešujemo z upoštevanjem pravil.



SLIKA 1.

Kitajski prstani

Kljub temu, da so pravila enostavna, reševanje zahteva veliko razmisleka in predvsem potrpežljivosti.

Ves čas bomo obravnavali splošen primer, torej problem n kitajskih prstanov, pri čemer je n poljubno število iz množice $\{0, 1, \dots\}$. Iz tehničnih razlogov, ki bodo omenjeni pozneje, je vključen tudi primer z 0 prstani. Za lažji opis rešitve problema bomo prstane označili. Prstane oštevilčimo naraščajoče, z oznakami od 1 do n tako, da prvi prstan na palici, torej prstan, ki je od držala palice najbolj oddaljen, dobi oznako 1.

Opis pravil za reševanje problema

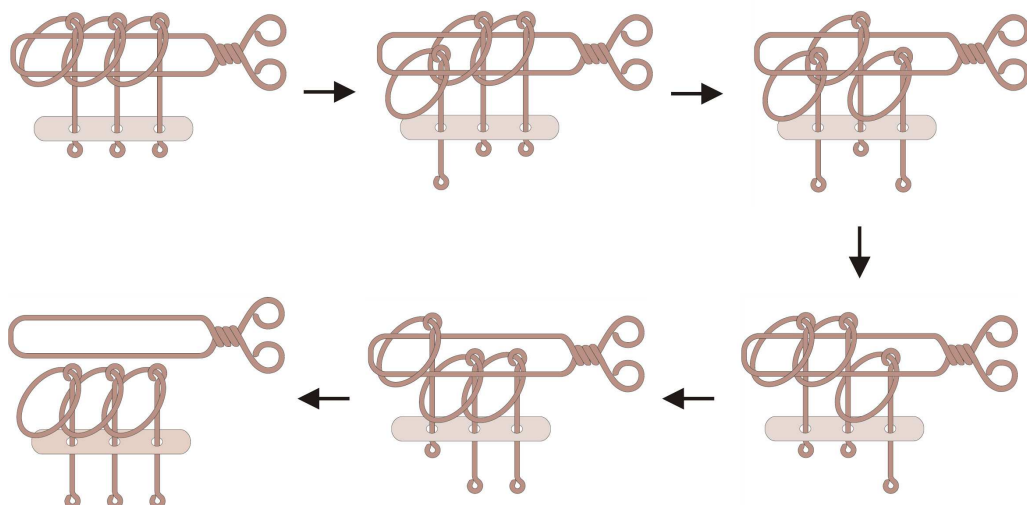
Začetno stanje je stanje, ko so vsi prstani na palici. Iz tega stanja lahko pridemo v katerokoli drugo stanje, in sicer z zaporedno uporabo le dveh potez. Premaknemo lahko:

- prstan z oznako 1 (poteza tipa 0);
- prstan z oznako $i + 1$, če je prstan z oznako i na palici, prstanov z oznakami $1, \dots, i - 1$ pa na palici ni (poteza tipa 1).

Pri tem premik prstana pomeni, da mu zamenjamo položaj iz *je na palici* v *ni na palici* oziroma obratno.

Problem kitajskih prstanov porodi najprej vprašanje, ali rešitev sploh obstaja. Obstoj rešitve porodi nadaljna vprašanja; eno od teh je vprašanje o najmanjšem številu potez, potrebnih za rešitev problema.

Predpostavimo, da problem kitajskih prstanov začnemo reševati v začetnem stanju in da bomo problem rešili s kar najmanj potezami. Potem imamo za prvo potezo dve možnosti; bodisi iz palice odstranimo prstan z oznako 1 (poteza tipa 0) bodisi odstranimo prstan z oznako 2 (poteza tipa 1). Ker je naša rešitev najkrajša, ne bomo v nobeno stanje prišli več kot enkrat. Torej imamo za vse nadaljnje poteze samo še eno možnost, saj bi nas dve zaporedni potezi istega tipa pripeljali v že obiskano stanje. Zato bo naše zaporedje alternirajoče zaporedje potez tipa 0 in 1. Na sliki 2 je zaporedje potez, ki rešijo problem treh kitajskih prstanov.



SLIKA 2.

Postopek reševanja problema treh kitajskih prstanov

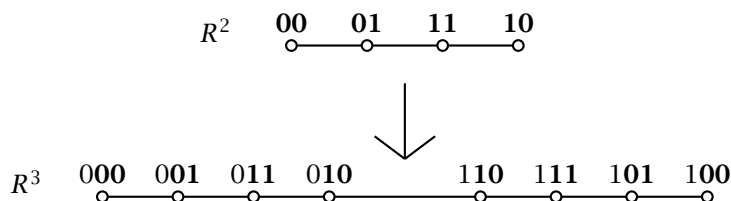
Rešitev problema z grafi

Za vsak prstan obstajata dve možnosti, in sicer, ali je prstan na palici ali pa ga ni. Če je na palici, potem mu priredimo vrednost 1, sicer mu priredimo vrednost 0. Potemtakem lahko vsako stanje problema $n \in \mathbb{N}_0$ kitajskih prstanov predstavimo kot $s = s_n \dots s_1$, pri čemer $s_i = 1(0)$ pomeni, da prstan z oznako i je(ni) na palici. Tukaj opozorimo še, da za $n = 0$ s predstavlja prazen niz. Glede na zgoraj omenjeni pravili, lahko bit s_{i+1} spremenimo, če je bodisi $i = 0$ (poteza tipa 0) bodisi je $s_i = 1$ in $s_j = 0$ za vsak $j \in \{1, \dots, i-1\}$ (poteza tipa 1). Za vsak $i \in \{1, \dots, n\}$ definirajmo $\bar{s}_i = 1 - s_i$. Potem lahko dovoljene premike opišemo tudi takole. Iz stanja $s_n \dots s_2 s_1$ lahko z eno potezo pridemo v stanje $s_n \dots s_2 \bar{s}_1$, iz stanja

$s_n \dots s_i 1 0 \dots 0$ pa lahko prav tako z eno potezo pridemo v stanje $s_n \dots \bar{s}_i 1 0 \dots 0$.

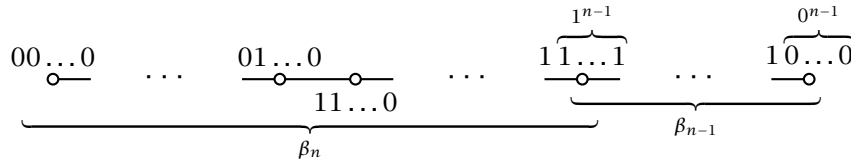
Iz zgoraj opisanega postopka, kako iz danega stanja z eno potezo pridemo v drugo stanje, bomo konstruirali graf R^n . Vsako stanje problema predstavlja eno vozlišče grafa, dve vozlišči (stanji) sta povezani s povezavo natanko takrat, ko lahko iz enega stanja z eno potezo pridemo v drugo stanje. Zdaj lahko problem zapišemo z uporabo grafov: poišči (najkrajšo) pot med $1^n = \underbrace{1 \dots 1}_n$ in $0^n = \underbrace{0 \dots 0}_n$.

Graf R^n vsebuje natanko dve vozlišči, ki imata natanko enega sosedu. To sta vozlišči, ki predstavljata stanji 0^n in $10^{n-1} = 1 \underbrace{0 \dots 0}_{n-1}$, kjer je mogoča le po-



SLIKA 3.

Konstrukcija grafa R^3 iz grafa R^2



SLIKA 4.

Graf R^n

teza tipa 0. Vsa druga vozlišča imajo natanko dva soseda, saj za vsako tako stanje obstajata obe relaventni potezi (tipa 0 in tipa 1). Iz omenjenih lastnosti grafa R^n zlahka dokažemo, da je R^n pot na 2^n vozliščih, s krajiščema 0^n in 10^{n-1} , ki vsebuje stanje 1^n . Dokaz najenostavneje opravimo z indukcijo. Če vsakemu stanju poti R^{n-1} na levo stran pripnemo 0, dobimo pot od 0^n do 010^{n-2} . Ta vsebuje vsa stanja grafa R^n , ki se začnejo z 0. Enako velja, če vsakemu stanju poti R^{n-1} na levo stran pripnemo 1 in tako dobimo pot od 10^{n-1} do 110^{n-2} . Ta vsebuje vsa stanja grafa R^n , ki se začnejo z 1. Ker sta 010^{n-2} in 110^{n-2} edini stanji z različnima prvima bitoma, ki ju povezuje poteza tipa 1, sta vozlišči 010^{n-2} in 110^{n-2} sosednji v R^n , kar pomeni, da je R^n pot. Opazimo lahko, da graf R^n sestavljata dve disjunktni kopiji grafa R^{n-1} , pri čemer v prvi kopiji vsakemu vozlišču $s = s_{n-1} \dots s_1$ dodamo $s_n = 0$ in dobimo vozlišče $0s_{n-1} \dots s_1$. V drugi kopiji vsakemu vozlišču $s = s_{n-1} \dots s_1$ dodamo $s_n = 1$, niz s pa obrnemo in dobimo $1s_1 \dots s_{n-1}$ (glej sliko 3).

Ker je R^n pot na 2^n vozliščih s krajiščema 0^n in 10^{n-1} , ki vsebuje stanje 1^n , za vsak n obstaja rešitev problema n kitajskih prstanov. Ker lahko od 0^n do 10^{n-1} pridemo v $2^n - 1$ potezah in ker 1^n leži na poti med 0^n in 10^{n-1} , za rešitev problema n kitajskih prstanov zadošča manj kot $2^n - 1$ potez.

Iz rešitve problema treh prstanov je razvidno, da je v najkrajši rešitvi treba začeti s potezo tipa 0, sicer nas alternirajoče zaporedje potez v R^3 vodi od 111 proti 100, s čimer se oddaljujemo od stanja 000. Ker je vsako najkrajše zaporedje potez za rešitev problema kitajskih prstanov alternirajoče zaporedje potez tipa 0 in 1, je za vsak lihi n prva poteza v najkrajši rešitvi poteza tipa 0. Za sode n velja ravno nasprotno, in sicer je v najkrajši rešitvi prva poteza vedno poteza tipa 1.

V nadaljevanju bomo iz zgoraj opisane konstrukcije grafa R^n izpeljali rekurzijo za najmanjše število

potrebni potez za rešitev n kitajskih prstanov. Z β_n označimo najmanjše število potez, potrebnih, da spraznimo palico z n prstani, to je, da pridemo iz stanja 1^n do stanja 0^n . Ker je R^n pot, je β_n ravno razdalja v grafu R^n med vozliščema 1^n in 0^n . Iz konstrukcije grafa R^n sledi, $\beta_{n-1} = (2^n - 1) - \beta_n$ (glej sliko 4). Na ta način dobimo rekurzivni zapis $\beta_n + \beta_{n-1} = 2^n - 1$, z začetnim pogojem $\beta_0 = 0$, s čimer lahko za poljubno število prstanov n pridemo do rešitve v končnem številu korakov. Iz rekurzije lahko s preprostim izračunom pridemo do eksplisitne formule za β_n .

Iz enačb $\beta_n + \beta_{n-1} = 2^n - 1$ in $\beta_{n-1} + \beta_{n-2} = 2^{n-1} - 1$ dobimo, da je $\beta_n - \beta_{n-2} = 2^{n-1}$. Če zaporedoma manjšamo indekse, za sodi n dobimo:

$$\begin{aligned} \beta_n &= \beta_{n-2} + 2^{n-1} \\ &= (\beta_{n-4} + 2^{n-3}) + 2^{n-1} = \dots \\ &= \beta_2 + 2^3 + 2^5 + \dots + 2^{n-1} \\ &= 2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} \\ &= 2 \left(1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{\frac{n-2}{2}} \right) \\ &= 2 \frac{4^{\frac{n}{2}} - 1}{4 - 1} = \frac{2^{n+1} - 2}{3}. \end{aligned}$$

Podobno za lihe n dobimo, da je $\beta_n = \frac{2^{n+1} - 1}{3}$.

S tem smo dobili formulo, z uporabo katere lahko, za poljubno naravno število n , izračunamo najmanjše število potrebnih potez, ki rešijo problem n kitajskih prstanov.

Literatura

- [1] A. M. Hinz, S. Klavžar, U. Milutinović in C. Petr, *The Tower of Hanoi-Myths and Maths*, Birkhäuser 2013.

× × ×