PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **8** (1980/1981)
Številka 4
Stran 222

Marko Petkovšek:

NALOGA O PRESEKOVEM ZNAMENJU

Ključne besede: matematika, kombinatorika, Eulerjeva formula.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/8/509-Petkovsek.pdf

NALOGA O PRESEKOVEM ZNAMENJU

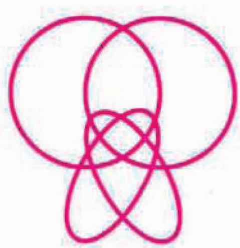
Presekovo znamenje (glej naslovno stran, desno spodaj) je sestavljeno iz treh krogov, ki ponazarjajo medsebojno prepletanje treh ved: matematike, fizike in astronomije. Poskusi narisati ustrezno znamenje za *štiri* vede! Zastopani naj bodo vsi možni preseki štirih likov, a vsak samo enkrat.
Pozor: s samimi krogi najbrž ne bo šlo!

Marko Petkovšek

LIST ZA MLADE
MATEMATIKE
FIZIKE
ASTRONOME
IZDAJA DMFA SRS

NALOGA O PRESEKOVEM ZNAMENJU - rešitev s str. 222

Slika kaže eno od možnih rešitev z 2 krogoma in 2 elipsama:



Če štejemo tudi zunanje neomejeno polje, ima Presekovo znamenje 8 polj, znamenje za 4 vede pa 16 polj. Koliko polj bi imelo znamenje za n ved? Da bodo v njem zastopani vsi možni preseki morata vsakemu polju znamenja za n - 1 ved ustrezati dve polji za n ved: eno leži znotraj, drugo pa zunaj n-tega lika. Če torej število ved povečamo za 1, se število polj podvoji. Eni vedi ustrezata očitno dve polji, n vedam potemtakem 2^n polj.

Kako pa vidimo, da se znamenja za 4 vede ne da sestaviti iz samih krogov?

Eulerjeva formula za povezane ravninske mnogokotniške mreže se glasi

$$o - r + p = 2$$

Tu je o - število oglišč, r - število robov in p - število polj mreže (vključno z zunanjim).

Denimo, da mrežo sestavljajo štiri krožnice. Koliko ima oglišč, robov? Dve krožnici v ravnini sta lahko brez skupnih točk, ali pa imata skupne vse svoje točke, natanko eno točko ali pa natanko dve točki. Prvi trije primeri tu ne pridejo v poštev, saj potem ne bi dobili vseh možnih presekov; prav tako se v eni točki ne smejo sekati tri ali celo več krožnic. Vsak par krožnic prispeva potemtakem natanko dve oglišči mreže. Ker lahko med štirimi krožnicami izberemo 6 različnih parov, ima mreža $o = 6\times 2 = 12$ oglišč.

Posamezna krožnica se seka s tremi drugimi krožnicami, tako da leži na njej 6 oglišč mreže, ki jo razdelijo na 6 lokov - robov mreže. Torej je $r = 4\times 6 = 24$.

Iz Eulerjeve formule dobimo s temi podatki

$$p = r - o + 2 = 14$$

Rabili pa bi 16 polj, torej s samimi krogi ne gre. Elipsi na sliki se sekata v 4 točkah, tako da dobimo dve oglišči in 4 robove več, to pa nam da ravno dve manjkajoči polji.

Prav tak razmislek nam pokaže, da je pri n krožnicah

$$o = (n(n - 1)/2)\times 2 = n^2 - n$$

$$r = n \times (2(n - 1)) = 2(n^2 - n)$$

$$p = r - o + 2 = n^2 - n + 2$$

če je $n \geq 2$. Formula za p pa očitno velja tudi pri $n = 1$.

Označimo $k(n) = n^2 - n + 2$ in $p(n) = 2^n$. Velja

$$k(n) = p(n) \qquad \text{za } n = 1,2,3$$

$$k(n) < p(n) \qquad \text{za } n \geq 4$$

S samimi krogi lahko narišemo le znamenja za 1,2 ali 3 vede.

Marko Petkovšek