Matematika v genetiki

Tadeja Kraner Šumenjak, Vilma Šuštar

Vsaka dedna lastnost je določena s prisotnostjo dveh neodvisnih enot, po ena od vsakega starša; imenujemo ju alelni par. Alelni par lahko vsebuje dve enaki neodvisni enoti (*AA* ali *aa*) ali pa različni (*Aa*). Če potomec deduje alelni par z enakima neodvisnima enotama, ga imenujemo *homozigot*, v nasprotnem primeru pa *heterozigot*. Denimo, da alel *A* nosi informacijo o rdeči, alel *a* pa o beli barvi. Če potomec nosi kombinacijo *aa*, je bele barve. Če nosi kombinacijo *AA*, pa rdeče. V primeru, da je potomec heterozigot s kombinacijo *Aa*, se bo izrazila le ena barva. Naj bo to v našem primeru rdeča. Alel, ki jo nosi, imenujemo *dominanten*. Bela barva ostane v tem primeru prikrita in pripadajoči alel imenujemo *recesiven*. Dominantne alele bomo zapisovali z velikimi tiskanimi črkami recesivne alele pa z malimi tiskani črkami. Z enakimi črkami bomo označevali tudi lastnost, ki se kaže navzven.

Dedovanje ene lastnosti

Najprej bomo opazovali križanje rastlin, kjer se bo dedovala le ena lastnost. Križajmo enako število rastlin, ki imajo alelni par AA, z enakim številom rastlin, ki imajo alelni par aa. Predpostavimo, da so vse kombinacije enako uspešne pri preživetju. Vse možne kombinacije pri križanju teh dveh rastlin lahko zapišemo s produktom

- $(A + A)(a + a) = Aa + Aa + Aa + Aa = 4Aa$

ali s produktom

- $(a + a)(A + A) = aA + aA + aA + aA = 4aA.$

Produkta sta enaka, saj sta alelna para Aa in aA genetsko enaka (vseeno je, kateri od staršev prispeva določen alel). Velja dogovor, da dominantni alel vedno zapisujemo pred recesivnim.

Ta produkt lahko pregledneje prikažemo tudi s tabelo 1.

gamete staršev	A	A
a	Aa	Aa
a	Aa	Aa

TABELA 1.
Razmerje genotipov pri dedovanju ene lastnosti.

V prvi generaciji imajo torej vse rastline genotip Aa.

Oglejmo si sedaj drugo generacijo. Naj bo A dogodek, da izberemo alel z dominantno lastnostjo iz alelnega para staršev Aa, in a dogodek, da izberemo alel z recesivno lastnostjo iz alelnega para staršev Aa. Verjetnost $P(A) = P(a) = \frac{1}{2}$. Ker sta dogodka med seboj neodvisna, je verjetnost, da dobimo potomca z alelnim parom AA, enaka

- $P(AA) = P(A)P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$

Verjetnost, da dobimo potomca z alelnim parom aa, je prav tako

- $P(aa) = P(a)P(a) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$

Verjetnost, da dobimo potomca z alelnim parom Aa, pa je

- $P(Aa) + P(aA) = 2P(Aa) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$

pri tem smo upoštevali, da sta z vidika genetika alelna para Aa in aA enaka.

Torej so v drugi generaciji genotipi v razmerju

- $AA : Aa : aa = \frac{1}{4} : \frac{1}{2} : \frac{1}{4}$

ali

- $AA : Aa : aa = 1 : 2 : 1.$

Vse možne kombinacije pri križanju rastlin z alelnima paroma Aa dobimo s produktom

- $(A+a)(A+a) =$
$$= AA + Aa + aA + aa = AA + 2Aa + aa,$$

kjer nam koeficienti pri posameznih faktorjih dajo zgornje razmerje.

Razmerje med potomci, ki kažejo dominantno lastnost, in tistimi, ki kažejo recesivno lastnost, je $3:1$ v korist dominantne, kar bomo v nadaljevanju zapisovali z izrazom $3A+a$. Za vidno lastnost osebka pa bomo uporabljali strokovni izraz fenotip.

Primer. Križajmo med seboj rastline, ki imajo »čiste« bele in »čiste« rdeče cvetove. Ker je rdeča barva dominantna nad belo, so to rastline, ki imajo alelna para aa in AA. Potomci so rdeče barve, če imajo genotip AA ali Aa, in so bele barve, če imajo genotip aa. V prvi generaciji imajo vsi potomci alelni par Aa, torej so vsi rdeče barve.

V drugi generaciji je verjetnost, da je potomec rdeče barve, enaka $\frac{3}{4}$, verjetnost da je bele, pa $\frac{1}{4}$.

V tretji generaciji dobimo vse možne kombinacije alelnih parov potomcev, če izračunamo produkt

- $((A+A)+(a+A)+(A+a)+(a+a))^2 =$
$$= (4A+4a)^2 = 16(AA + 2Aa + aa).$$

Razmerje genotipov v tretji generaciji je torej $16:32:16$, kar je enako razmerju $1:2:1$. Od tod sledi, da so verjetnosti, da dobimo potomca z alelnim parom AA, aa ali Aa enake kot v drugi generaciji. S podobnim razmislekom bi opazili, da se to razmerje ohrani v vseh nadaljnjih generacijah. O tem govori *Hardy – Weinbergov zakon* iz leta 1908, ki pravi, da se v velikih populacijah pri naključnem razmnoževanju osebkov enakih sposobnosti razmerja genotipov ohranjajo.

Dedovanje dveh lastnosti

Sedaj pa proučujemo potomce glede na dvoje lastnosti. Prva se navzven kaže kot A oz. a, druga pa kot B oz. b. Če križamo rastline, ki imajo genotipa $AABB$ in $aabb$, imajo vse rastline v prvi generaciji genotip $AaBb$, kar dobimo s produktom

- $(A+A)(a+a)(B+B)(b+b) = 4Aa4Bb = 16AaBb.$

Ker je genetska zasnova enega roditelja enaka

- $(A+a)\cdot(B+b) = AB + Ab + aB + ab,$

dobimo vse možne genotipe v drugi generaciji s produktom

- $((A+a)(B+b))^2 =$
$$\begin{aligned} &= (AA + 2Aa + aa)\cdot(BB + 2Bb + bb)\\ &= AABB + 2AABb + AAbb + 2AaBB +\\ &\quad + 4AaBb + 2Aabb + aaBB + 2aaBb +\\ &\quad + aabb. \end{aligned}$$

Ta produkt lahko nazorneje prikažemo s tabelo 2.

gamete staršev	AB	Ab	aB	ab
AB	$AABB$	$AABb$	$AaBB$	$AaBb$
Ab	$AABb$	$AAbb$	$AaBb$	$Aabb$
aB	$AaBB$	$AaBb$	$aaBB$	$aaBb$
ab	$AaBb$	$Aabb$	$aaBb$	$aabb$

TABELA 2.
Razmerje genotipov pri dedovanju dveh lastnosti.

Opazimo, da so genotipi v razmerju $1:2:1:2:4:2:1:2:1$. Razmerje fenotipov $9:3:3:1$ pa dobimo s produktom fenotipov za posamezno lastnost:

- $(3A+a)\cdot(3B+b) = 9AB + 3aB + 3Ab + ab.$

Vse možne genotipe v tretji generaciji dobimo s produktom

- $((A+A)\cdot(B+B) + (A+A)\cdot(B+b) +$
$$\begin{aligned} &+ (A+a)\cdot(B+B) + (A+a)\cdot(B+b) +\\ &+ (A+A)\cdot(B+b) + (A+A)\cdot(b+b) +\\ &+ (A+a)\cdot(B+b) + (A+a)\cdot(b+b) +\\ &+ (A+a)\cdot(B+B) + (A+a)\cdot(B+b) +\\ &+ (a+a)\cdot(B+B) + (a+a)\cdot(B+b) +\\ &+ (A+a)\cdot(B+b) + (A+a)\cdot(b+b) +\\ &+ (a+a)\cdot(B+b) + (a+a)\cdot(b+b))^2 =\\ = {} & 256AABB + 512AABb + 256AAbb +\\ &+ 512AaBB + 1024AaBb + 512Aabb +\\ &+ 256aaBB + 512aaBb + 256aabb. \end{aligned}$$

Če pogledamo koeficiente pred posameznimi členi, dobimo enako razmerje genotipov kot v drugi generaciji:

- $1:2:1:2:4:2:1:2:1$.

Dedovanje n lastnosti

Zaradi preglednosti uredimo razmerja genotipov tako, da bomo najprej zapisali genotipe brez heterozigotnih alelnih parov, nato genotipe z enim heterozigotnim parom, nazadnje genotipe, ki imajo le heterozigotne alelne pare. Tako je:

- razmerje pri dedovanju ene lastnosti $AA : aa : Aa = 1:1:2$,
- razmerje pri dedovanju dveh lastnosti $AABB : AAbb : aaBB : aabb : AABb : AaBB : Aabb : aaBb : AaBb = 1:1:1:1:2:2:2:2:4$.

Oglejmo si, kakšno je razmerje genotipov, če opazujemo n lastnosti. Ustrezna razmerja bi dobili iz koeficientov izračunanega produkta:

- $((A_1+a_1)\cdot(A_2+a_2)\cdot(A_3+a_3)\dots(A_n+a_n))^2$.

Koeficienti pred vsemi genotipi, ki imajo k heterozigotnih ($k=0,\dots,n$) in $n-k$ homozigotnih alelnih parov, so enaki, in sicer 2^k, ker lahko vsakega od teh k parov zapišemo na dva načina A_ia_i ali a_iA_i.

Za določitev razmerja pa potrebujemo še število takšnih genotipov. Najprej izmed n mest (vsako mesto pripada eni lastnosti) izberemo k mest za heterozigotne alelne pare. To lahko naredimo na $\binom{n}{k}$ načinov. Za vsako od k mest imamo le eno možnost, saj sta razporeditvi A_ia_i in a_iA_i genetsko enaki. Za preostalih $n-k$ mest, določenih za homozigotne pare, pa imamo po dve možnosti A_iA_i ali a_ia_i, zato je iskano število enako

- $\binom{n}{k}2^{n-k}$.

Število vseh različnih genotipov je enako 3^n, saj imamo za vsako od n mest (vsako mesto pripada posamezni lastnosti) tri različne možnosti:

- A_iA_i, A_ia_i ali a_ia_i.

Razmerje fenotipov pa dobimo, če izračunamo produkt:

- $(3A_1+a_1)\cdot(3A_2+a_2)\cdot\ldots\cdot(3A_n+a_n)$.

Primer. Poglejmo si dedovanje treh lastnosti ($n=3$). Število genotipov brez heterozigotnih alelnih parov s koeficienti $2^0=1$ je enako

- $\binom{3}{0}2^{3-0}=8$.

Število genotipov z enim heterozigotnim alelnim parom s koeficienti $2^1=2$ je enako

- $\binom{3}{1}2^{3-1}=12$.

Število genotipov z dvema heterozigotnima alelnima paroma s koeficienti $2^2=4$ je enako

- $\binom{3}{2}2^{3-2}=6$.

Število genotipov brez homozigotnih parov s koeficienti $2^0=1$ je enako

- $\binom{3}{3}2^{3-3}=1$.

Dobimo razmerje

- $1:1:1:1:1:1:1:1:2:2:2:2:2:$
  $:2:2:2:2:2:2:2:4:4:4:4:4:4:8$.

Število različnih genotipov je enako $3^n=3^3=27$.

Končajmo z mislijo, ki jo je pred več kot tristo leti zapisal Galileo Galilei: Zakoni narave so zapisani v jeziku matematike.

Literatura

[1] B. Brajkovič, *Genetika*, Ljubljana, DZS, 2006.

[2] G. Valentić, *Matematika u prirodi*, PlayMath, Vol. V, No. 14, Studeni 2007.

×××