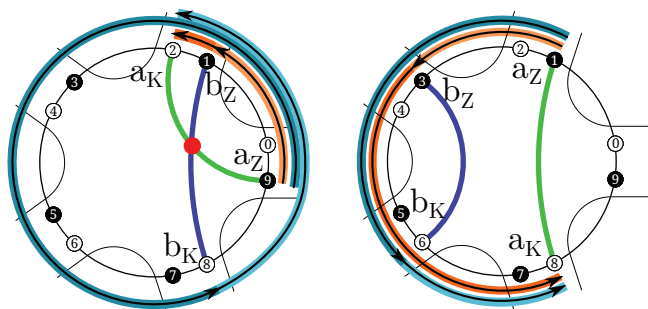




SLIKA 6.

Prepoznavanje presečišč s pomočjo cikličnega sprehoda. Levo: sprehoda 9-1-2 in 9-8-2 sta različno dolga, torej se poti sekata. Desno: sprehoda 3-1-8 in 3-6-8 sta enako dolga, torej se poti ne sekata.

Če z $\text{mod}(x, n)$ pišemo pozitivni ostanek x po deljenju z n , potem se poti ne sekata, če in samo če velja enačba

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad & \text{mod}(b_Z - a_Z, n) + \text{mod}(a_K - b_Z, n) = \\ & = \text{mod}(b_K - a_Z, n) + \text{mod}(a_K - b_K, n). \end{aligned}$$

To pa je nekaj, kar računalnik lahko preveri brez znanja geometrije.

Videli smo, da s pomočjo teorije grafov lahko sistematično opišemo možne semaforne cikle in izberemo tistega, ki najbolj ustreza naši situaciji. Tovrstno analizo lahko naredimo za poljubno križišče, na primer za križišče petih cest, pri čemer ugotovimo, da imamo 32 možnih 5-stopenjskih semafornih ciklov, če prepovemo zavijanje na isti izhodni pas. Tako kompleksna križišča so nepraktična in za voznike nepregledna, predvsem pa imajo nizko pretočnost. V takih primerih raje uporabimo dve zaporedni križišči, najraje pa kar krožišče. Krožišča nimajo težav s križanjem poti, še vedno pa imamo poti, ki se zlivajo v isti vozni pas – vozila se vključujejo na pas, po katerem z leve lahko prihaja vozilo, ki je že v krožišču.

Bralce vabim, da med čakanjem pri rdeči luči opazujejo, katera različica semafornega cikla velja, kako se razvrščajo v pasove, in kako se razrešujejo zavoji, ki jih semafor mogoče ne regulira ločeno. S tem bo tudi čakanje mogoče postalo nekoliko manj nadležno.

× × ×

Tri lastnosti števila 2023

↓↓↓

MARKO RAZPET



1. Število 2023 je petkrat pohlevno, ker se ga da izraziti na pet načinov kot vsoto nekaj zaporednih naravnih števil, denimo $x, x+1, \dots, x+n-1$. Pri tem sta števili x in n naravni. Veljati mora torej relacija

$$\blacksquare \quad x + (x+1) + \dots + (x+n-1) = 2023.$$

Vsoto na levi strani znamo poenostaviti, tako da dobimo

$$\blacksquare \quad \frac{n(x + (x+n-1))}{2} = 2023$$

oziroma

$$\blacksquare \quad n(2x + n - 1) = 2 \cdot 7 \cdot 17^2.$$

Desno stran te relacije lahko zapišemo na pet načinov kot produkt dveh faktorjev: $2 \cdot (7 \cdot 17^2)$, $14 \cdot 17^2$, $34 \cdot (7 \cdot 17)$, $17 \cdot (14 \cdot 17)$, $7 \cdot (2 \cdot 17^2)$. Zato lahko izberemo $n = 2$, $2x + n - 1 = 7 \cdot 17^2$ in dobimo $x = 1011$. Podobno sledi za $n = 14$, $2x + n - 1 = 17^2$ še $x = 138$ itd. To pomeni, da veljajo zapisi

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad & 2023 = 1011 + 1012 = 138 + 139 + \dots + 151 \\ & = 43 + 44 + \dots + 76 \\ & = 111 + 112 + \dots + 127 \\ & = 286 + 287 + \dots + 292. \end{aligned}$$

2. Število 2023 je kongruentno, kar pomeni, da obstaja pravokoten trikotnik, ki ima za stranice racionalna števila in ploščino 2023.

Ker je $2023 = 7 \cdot 17^2$, je dovolj pokazati, da je 7 kongruentno število. Ni vsako naravno število kongruentno. Najmanjše kongruentno število je 5, kar je vedel že Fibonacci.

Pravokotne trikotnike, ki imajo za stranice a, b, c ($a^2 + b^2 = c^2$) naravna števila, to je pitagorejske trikotnike, znamo poiskati s formulami

$$\blacksquare \quad a = m^2 - n^2, b = 2mn, c = m^2 + n^2.$$

Pri tem sta m in n naravni števili in $m > n$. Če sta m in n tuji si števili različnih parnosti, potem a, b, c nimajo skupnega faktorja in pitagorejski trikotnik se imenuje primitiven. Ploščina trikotnika je $p = ab/2 = (m-n)(m+n)mn$. Poiskati moramo m in n tako, da bo p sedemkratnik nekega popolnega kvadrata. S poskušanjem ugotovimo, da za $m = 16$ in $n = 9$ dobimo

$$a = 175, b = 288, c = 337, p = \frac{ab}{2} = 7 \cdot 60^2.$$

Pravokoten trikotnik s stranicami

$$a' = a/60 = \frac{35}{12}, b' = b/60 = \frac{24}{5},$$

$$c' = c/60 = \frac{337}{60}$$

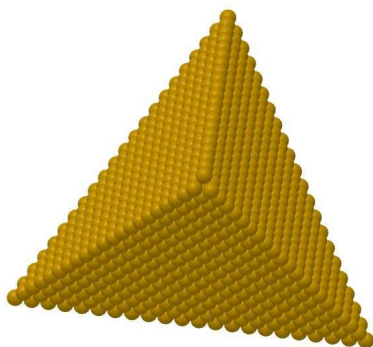
ima ploščino $p' = 7$, zato je 7 kongruentno število. Pravokoten trikotnik, ki ima 17-krat daljše stranice, to se pravi

$$a'' = 17a' = \frac{595}{12}, b'' = 17b' = \frac{408}{5},$$

$$c'' = 17c' = \frac{5729}{60},$$

ima ploščino $p'' = 17^2 p' = 7 \cdot 17^2 = 2023$. Zato je število 2023 res kongruentno.

3. Število 2023 je za 1 manjše od 22. tetraedrskega števila. To pomeni, da lahko 2023 enakih kroglic zložimo v tetraeder, ki mu manjka vrh. V k -ti plasti, šteto od vrha navzdol, je $T_k = k(k+1)/2$, to je trikotniško število kroglic.



Tetraedrsko število $\mathcal{T}_n$, n -to po vrsti, je vsota prvih n trikotniških števil:

$$\mathcal{T}_n = \sum_{k=1}^n T_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (k^2 + k)$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{n(n+1)}{4}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Lahko ga zapišemo tudi kot

$$\mathcal{T}_n = \binom{n+2}{3}.$$

Ker je

$$2023 + 1 = 2024 = 8 \cdot 11 \cdot 23 = \frac{1}{6} \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 = \mathcal{T}_{22},$$

lahko zapišemo $2023 = \mathcal{T}_{22} - 1$.

xxx

Križne vsote

↓↓↓

→ Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števki od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v sivem kvadratu na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse števe v posamezni vrstici (stolpcu) različne.

	11	10					
6						17	12
12			10		14	15	
	10			24			
		14		9			
			4				

xxx